Школа лингвистики, 2023-24 уч. год
Дискретная математика для лингвистов
Первая неделя (5 – 8 сентября 2023 года)
В. В. Кочергин, Ю. Г. Кудряшов, А. В. Михайлович, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Метод математической индукции.

Задача 1. Доказать, что при любом натуральном n число $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6.

Задача 2. Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа истинно следующее утверждение: число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

Задача 3. Докажите неравенство для любого натурального n $n! \geq 2^{n-1}$.

Задача 4. Докажите неравенство для любого натурального n $3^n \geq n^2$.

Задача 5. Докажите равенство для любого натурального n $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Задача 6. Докажите равенство для любого натурального n $1 \times 1! + 2 \times 2! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$.

Задача 7. Для всех $n \geq 2$ докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Задача 8. Для любого натурального n доказать утверждение методом математической индукции:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad (n \geq 2).$$

Задача 9. Докажите неравенство для любого натурального n

$$2!4!\ldots(2n)! > ((n+1)!)^n, \quad (n > 2).$$

Задача 10. Для любого натурального n доказать, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Задача 11. Доказать, что, имея гирьки весом 3 г и 5 г (в неограниченном количестве), можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой n г, где n — натуральное число, превосходящее 7.

Задача 12. Егор Иванович умеет рвать клочок бумаги на 4 и 6 кусочков. Верно ли, что Е. И. сможет порвать клочок бумаги на любое число частей n (где $n > 8$)?

Задача 13. В кругу друзей Александра Сергеевича из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная только ему одному. Друзья могут встретиться, и за одну встречу каждый может узнать все новости, известные другому. Проблема в том, что встречаться можно только по двое. Александр Сергеевич догадался, что что за $2k - 4$ встречи все k людей смогут узнать все новости. Почему?

Задача 14. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geq 1$. Найдите a_n.

Задача 15. На какое наибольшее число частей могут делить плоскость n прямых?

Задача 16. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

Задача 17. Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ – простое при любом натуральном n?

Задача 18. Докажите неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}}_{2022}+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{2022}<5.$$

Задача 19. (a) Показать, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$.

(b) Показать, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$ (всего n корней, $n \geq 1$.)

Задача 20. Задача о ханойской башне. Даны три стержня, на которых помещены диски различного размера. Исходно все n дисков лежат на первом стержне, таким образом, что каждый меньший диск лежит на большем. Требуется переместить все диски на третий стержень. Диски можно перекладывать со стержня на стержень по одному, причем запрещено класть больший диск на меньший. Ханойская башня «собрана», когда все диски лежат на третьем стержне.

(a) Докажите, что для любого n ханойская башня может быть собрана.

(b) Докажите, что ханойскую башню из n дисков невозможно «собрать» меньше, чем за $2^n - 1$ ходов.

Задача 21. На краю пустыни имеется неограниченный запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можносливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Задача 22. Имеется два стакана, в первом стакане налито некоторое количество воды, а во втором — такое же количество спирта. Разрешается переливать некоторое количество жидкости из одного стакана в другой (при этом раствор равномерно перемешивается). Можно ли с помощью таких операций получить в первом стакане раствор, в котором процентное содержание спирта больше, чем во втором?