Задачи к семинарам

по курсу «Дискретная математика»
отделение лингвистики, 1-й курс
2023/24 учебный год, осень

Тема: Комбинаторика: рекуррентные соотношения 10 октября 2023 г (вторник)

Найти общие решения линейных однородных рекуррентных соотношений:

Задача 1. $a_{n+1} + 3a_n = 0$.

Задача 2. $a_{n+2} - 3a_n = 0$.

Задача 3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$.

Задача 4. $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Задача 5. $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.

Задача 6. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$.

Найти a_n по линейным однородным рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

Задача 7. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0;\quad a_0 = 10,\ a_1 = 16$.

Задача 8. $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0;\quad a_0 = 6,\ a_1 = 6$.

Задача 9. $a_{n+2} - a_n = 0;\quad a_0 = 0,\ a_1 = 2$.

Задача 10. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0;\quad a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 12$.

Задача 11. $a_{n+3} - 3a_{n+1} + a_n = 0;\quad a_0 = a,\ a_1 = b,\ a_2 = c$.

Решить линейные рекуррентные уравнения:

Задача 12. $\begin{cases} x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 2. \end{cases}$

Задача 13. $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \\ x_0 = 0, \quad x_1 = -1. \end{cases}$

Задача 14. $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1, \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1. \end{cases}$

Задача 15. $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n, \\ a_1 = a_2 = 1. \end{cases}$

Задача 16. $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n, \\ a_1 = a_2 = 1. \end{cases}$

Задача 17. $\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 8a_{n-2} + (-2)^n, \\ a_1 = 0, \quad a_2 = 1. \end{cases}$

Задача 18. $\begin{cases} x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n2^n + n^2, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 1. \end{cases}$

Решить системы линейных рекуррентных уравнений:

Задача 19. $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n, \\ b_{n+1} = -a_n + b_n, \end{cases} \qquad a_1 = 14, b_1 = -6.$

Задача 20. $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n, \\ b_{n+1} = 2b_n + a_n + 2n, \end{cases} \qquad a_0 = 0, b_0 = 1.$

Решить рекуррентные уравнения:

Задача 21. $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - x_{n+1}x_n, \\ x_0 = 1. \end{cases}$

Задача 22. $\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^3}{x_n^2}, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = e. \end{cases}$

Задача 23 (*)**.** (Для знакомых с комплексными числами.)
$\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} + 5x_{n-2} - 10x_{n-3} + 4x_{n-4} - 8x_{n-5} = 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -12, \quad x_3 = -6, \quad x_4 = 16. \end{cases}$
Ответ: $x_n = i^{n+1} + (-i)^{n+1} + (2i)^n + (-2i)^n - 2^n$.

Доказать свойства последовательности Фибоначчи $\{f_n\}$, задаваемой рекуррентным соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальными условиями $f_1 = f_2 = 1$ (или, что то же самое, начальными условиями $f_0 = 0$, $f_1 = 1$):

Задача 24. Члены последовательности Фибоначчи вычисляются по формулам:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Задача 25. Пусть φ — «золотое сечение», т. е. $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Тогда для n-го члена последовательности Фибоначчи справедливы формулы:
а) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$ (формула Бине);
б) $f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil$.

Задача 26. Для всех $n \geqslant 0$ верно равенство

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = f_{n+1}.$$

Задача 27. Справедливы равенства

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} = f_{n+1}f_{m+1} - f_{n-1}f_{m-1}.$$

Задача 28. Элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

б) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

в) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

г) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

д) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;

е) $f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n$;

ж) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + \ldots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$;

з) $f_3 + f_6 + \ldots + f_{3n} = (1/2)(f_{3n+2} - 1$;

и) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

Задача 29. Для любых n и $m = kn$ число f_m делится на f_n.

Задача 30. Любые два соседних члена последовательности Фибоначчи взаимно просты. Более того,

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

Задача 31. Найдется ли среди первых 100000001 членов последовательности Фибоначчи число, оканчивающееся четырьмя нулями?

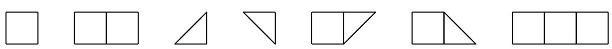
Задача 32. В последовательности Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих элементов. Докажите, что их сумма не является членом последовательности Фибоначчи.

Задача 33. Любое натуральное число n может быть представлено, причем единственным образом, в виде

$$n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leqslant 1$, $i = 2, 3, \ldots$

Задача 34. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 1 и длины 20, используя плитки высоты 1 следующих видов:



Задача 35. Найти число последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых каждый блок из единиц имеет четную длину.

Задача 36. Найти число последовательностей длины n над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, в которых нет ни двух нулей, ни двух единиц, стоящих подряд.

Задача 37. Найти число последовательностей длины n над алфавитом $\{0, 1, 2, 3\}$, в которых каждый блок из единиц имеет четную длину, а длины блоков из 2 и 3 кратны 3.

Задача 38. Найти количество n-разрядных десятичных чисел, в которых нет двух стоящих рядом четных цифр.

Задача 39. Найти количество n-разрядных десятичных чисел, в которых после цифры 2 не стоит цифра 5.