1 Графы

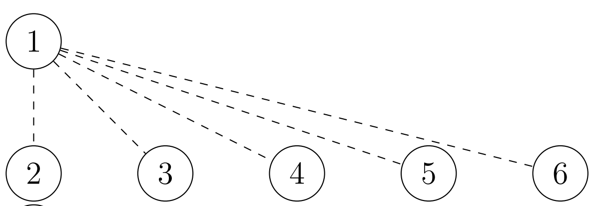
1.1 Вводная задача

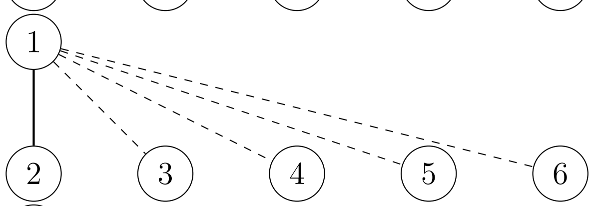
В окружающем нас мире существует большое количество всевозможных связей между различными объектами. Так, например, дороги соединяют между собой города, провода соединяют электроприборы, дружба соединяет между собой людей, а ссылки соединяют страницы в интернете. Часто структуры связей между объектами определенного вида становятся предметом научных исследований, в том числе лингвистических, социологических, кибернетических, логистических. Если число рассматриваемых объектов велико, структура связей между ними может оказаться достаточно сложной и запутанной. Тем не менее, необходимо на основе ее свойств искать эффективные алгоритмы ее изучения. При этом возникает потребность в построении математической модели структуры связей. Такой математической моделью является граф.

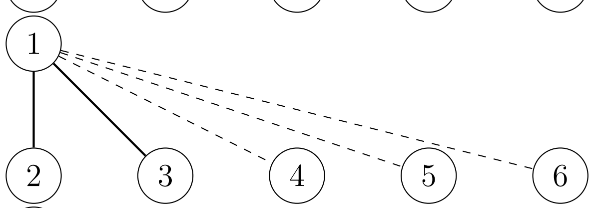
Начнём с одной простой задачи, ставшей уже классической.

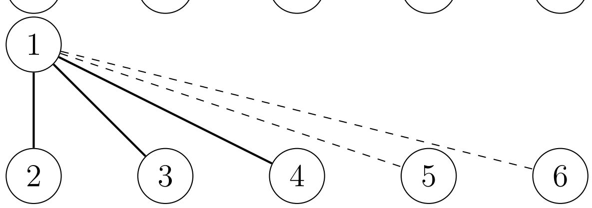
Рассмотрим следующую задачу. Нужно показать, что в любой компании, состоящей из 6 и более человек, всегда есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

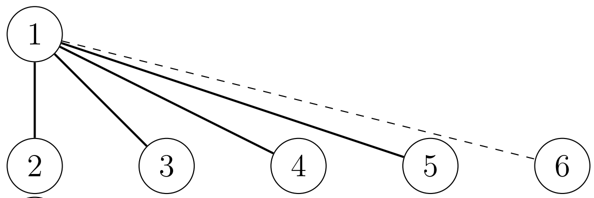
Для начала рассмотрим вариант этой задачи с 6 людьми в компании. Людей будем изображать точками на плоскости, знакомство — жирной линией, соединяющей соответствующие точки, а незнакомство — пунктиром. Посмотрим, как соединена точка, соответствующая человеку 1, с другими точками. Поскольку всего 5 линий, то в любом случае есть либо 3 (или больше) жирных, либо 3 (или больше) пунктирных.

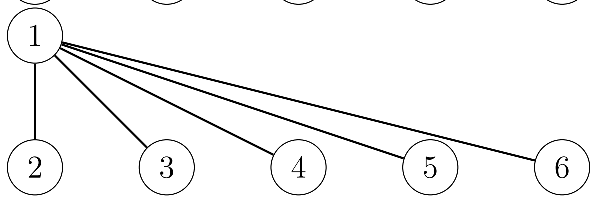




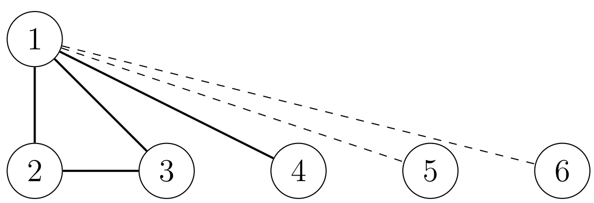




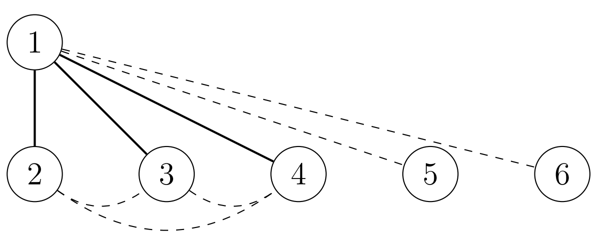




Рассмотрим случай с тремя жирными линиями (случай с тремя пунктирными линиями рассматривается аналогично). Пусть они соединяют точку 1 с точками 2, 3 и 4. Если среди линий, объединяющих точки 2, 3 и 4 есть жирная линия (например, соединяющая точки 2 и 3), то образуется треугольник из жирных линий, соответствующий трем попарно знакомым людям.



Если же среди этих линий нет жирных, то точки 2, 3 и 4 попарно соединены пунктиром. А значит, образуют тройку попарно незнакомых людей.



Таким образом, задачу для 6 человек решили.

Пусть у нас теперь в компании больше, чем 6 людей. Аналогичным образом соединяем первого со всеми остальными и рассматриваем те соединения, которых больше двух, и соответствующие им вершины.

1.2 Базовые определения

Сопоставим рассматриваемые объекты с элементами некоторого (непустого) множества V. Эти элементы называются *вершинами.* Связь между двумя объектами мы будем представлять в виде пары соответствующих вершин. Такие пары называются *ребрами.* Множество ребер мы обозначим через E. *Графом* G называется совокупность множеств V и E (обозначается также $G = (V, E)$).

Пример 1. Рассмотрим следующие пары множеств V и E. Какие из них являются графами, а какие не являются и почему?

1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_5), (v_2, v_5)\}$.

2. $V = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_2, v_4), (v_3, v_5), (v_2, v_5)\}$.

3. $V = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_5), (v_2, v_5)\}$.

4. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_5), (v_2, v_5)\}$.

5. $V = \varnothing$, $E = \varnothing$. [1]

Поскольку в зависимости от постановки задачи исследуемые связи могут быть как двусторонними (например, договоры о сотрудничестве между компаниями), так и односторонними (например, авиаперелеты между городами), то необходимо условиться о том, считаем мы ребра упорядоченными парами вершин или неупорядоченными (т.е. различаются пары (u, v) и (v, u), или это одна и та же пара). В первом случае ребра называют *ориентированными ребрами*, а граф — *ориентированным графом*. Во втором случае граф называется *неориентированным*.

Упражнение. Что из перечисленного можно описать ориентированным графом, а что — неориентированным? Если связи не указаны или неочевидны, рассмотрите различные варианты.

1. Дороги в городе.[2]

2. Тротуары.[3]

3. Метро (Москва).[4]

4. Автобусные маршруты (Москва).[5]

5. Несколько людей в социальной сети.[6]

6. Группу людей, среди которых есть как знакомые, так и незнакомые.[7]

7. Генеалогическое древо.[8]

---

[1] Графами не являются третье и пятое множества. В третьем множестве ребра содержат вершину v_2, которой нет в множестве V, а в пятом множество вершин пустое.

[2] Неориентированным графом можно описать только в том случае, когда все дороги двусторонние. В общем случае лучше использовать ориентированный граф.

[3] Тротуары, в отличие от дорог, двусторонние. Описание неориентированным графом подходит.

[4] Нериентированный граф.

[5] Ориентированный граф, так как не все остановки парные, не все маршруты ходят по одним и тем же дорогам.

[6] Если сеть допускает только двусторонние связи, то неориентированный, а если односторонние (например, вконтакте есть «подписчики»), то ориентированный.

[7] Поскольку знакомство является взаимным отношением, то можно описать ориентированным графом.

[8] Обычно в качестве связи используется отношение A является родителем B, поэтому граф ориентированный.

8. Сотрудники НИУ ВШЭ.[9]

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Пусть $u, v \in V$. Тогда, если $e = (u, v) \in E$, то говорят, что ребро e и вершины u и v *инцидентны* друг другу, а также, что ребро e соединяет вершины u и v, или что вершины u и v являются концами ребра e. Можно также сказать, что ребро e и вершина v инцедентны друг другу, если ребро e содержит вершину v. Если речь идет об ориентированном графе, то говорят, что ребро e выходит из вершины u и входит в вершину v.

Упражнение. Какие вершины и ребра являются инцедентными в следующем графе $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_3, v_5)$, $e_5 = (v_2, v_5)$?

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Пусть $u, v, w \in V$, $e_1 = (u, v) \in E$, $e_2 = (u, w)$. Тогда говорят, что вершины u и v являются *смежными*. Также смежными являются вершины u и w. Другими словами, смежными являются вершины соединённые ребром. *Смежными* являются рёбра, имеющие общую вершины. Так, например, рёбра e_1 и e_2 являются смежными.

Упражнение. Какие пары вершин являются смежными в графе $G = (V, E)$? Какие пары рёбер являются смежными в графе $G = (V, E)$? $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_3, v_5)$, $e_5 = (v_2, v_5)$?

При решении некоторых задач полезно также считать, что несколько различных ребер в множестве E могут представлять собой одну и ту же пару вершин (например, несколько различных способов доставки из одного пункта в другой). Такие ребра называются *кратными*. Граф, в котором допустимы кратные ребра, называется *мультиграфом*. Кроме того, при некоторых постановках приходится рассматривать ребра, у которых оба конца совпадают. Такие ребра называются *петлями*, а графы с петлями и кратными ребрами называются *псевдографами*. Если же постановка задачи не допускает использования кратных ребер и петель, то рассматриваемый граф называется *простым графом*. Отметим, что в разных источниках опускаются слова или приставки «мульти», «псевдо» или простой, в зависимости от тем и задач, которым посвящен этот источник. Например, в нашем курсе, если не сказано иное, рассматривается простой граф.

Упражнение. Что из перечисленного является простым графом, псевдографом, мультиграфом?

1. Граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_3, v_5)$, $e_5 = (v_2, v_5)$?

2. Граф, где вершинами являются аккаунты студентов вконтакте, посещающих курс дискретной математики, а ребрами — отношение «являться друзьями».

3. Московский метрополитен (станции пересадок считаются за одну вершину).

4. Граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_3, v_3)$, $e_5 = (v_2, v_5)$?

[9] Если в качестве связи рассматривать отношение A является начальником B, то ориентированный.

5. Граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_2, v_5)$, $e_5 = (v_2, v_5)$?

6. Граф, в котором вершинами являются все корпуса НИУ ВШЭ в г. Москва, а ребрами — дороги, их соединяющие. [10]

Визуально граф часто удобно представлять в виде схемы, на которой вершины изображены с помощью точек, а ребра — линий, соединяющих эти точки. Такое изображение графа называется его *геометрической реализацией.* С подобными схемами мы часто сталкиваемся в повседневной жизни, например, в метро. Вершинами графа метрополитена являются станции, а ребрами — перегоны и пересадки. Более простой пример дает граф $G_1 = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, а $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$. Геометрической реализацией этого графа является пятиугольник.

Пусть у нас есть граф $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Последовательность

$$v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} v_{i_2} \ldots v_{i_{s-1}} e_{i_s} v_{i_s},$$

где $v_{i_0}, \ldots, v_{i_s}$ — вершины из V, а $e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}$ — ребра из E, причем в каждой вида $v_{i_k-1} e_{j_k}$ и $e_{j_k} v_{j_k}$, $k = 1, \ldots, s$ вершина и ребро инцедентны, называется *путем.* Число ребер в последовательности называется *длиной пути* (в данном случае длина пути равна s). Путь, в котором все ребра различны, называется *цепью.* Путь, в котором все вершины различны, называется *простой цепью*

Вопрос. Может ли простая цепь содержать одинаковые ребра?

Путь называется *замкнутым*, если $v_{i_0} = v_{i_s}$. Замкнутый путь, в котором все ребра различны, называется циклом. Цикл, в котором все вершины различны, называется *простым циклом.*

		Первая и последняя вершины совпадают	
	Путь	→	замкнутый путь
Рёбра различны	↓		↓
	Цепь	→	цикл
Вершины различны	↓		↓
	Простая цепь	→	простой цикл

Граф называется *связным* (также *односвязным*), если для любых двух различных его вершин существует путь, соединяющий эти вершины. *Расстоянием* между двумя вершинами называется длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

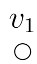
Путь	→	длина пути	→	расстояние
↓				
связный граф				

Упражнение. Может ли цепь, соединяющая 2 вершины, длина которой равна расстоянию между вершинами, содержать одинаковые вершины[11]?

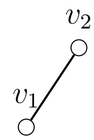
[10] 1,2,3 — простые графы, 4 — псевдограф, 5,6 — мультиграфы.

[11] Переформулируем вопрос: если мы добираемся из одной точки в другую кратчайшим путём, будем ли мы проходить через какое-то место дважды?

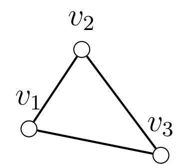
Полным графом называется граф, в котором две различные вершины смежны (то есть соединены ребром).



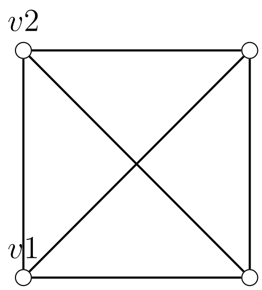
Полный граф с 1 вершиной



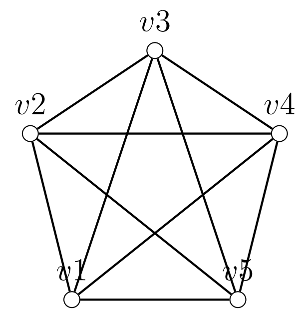
Полный граф с 2 вершинами



Полный граф с 3 вершинами



Полный граф с 4 вершинами



Полный граф с 5 вершинами

Пример 2. Найти число ребер в полном графе с 7 вершинами.

По определению полного графа каждая вершина соединена с 6 другими вершинами. А значит, степень каждой вершины равна 6. Учитывая то, что сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер, получаем, что число ребер равно $6 \cdot 7/2 = 21$.

Рассуждая аналогичным образом можно показать, что число ребер в полном графе, содержащем n вершин, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Дополнением графа $G = (V, E)$ называется граф $\overline{G} = (V, E')$, в котором вершины смежны в том и только том случае, когда они не смежны в графе G. Таким образом, при совмещении вершин графов G и $\overline{G}$ и объединении их ребер получаем полный граф ($G_1 = (V, E \cup E')$). Часто для решения задач гораздо удобнее перейти к рассуждениям про дополнение графа.

1.3 Способы задания графа

Несмотря на то, что задание графа с помощью геометрической реализации вполне наглядно для человека, в памяти компьютера граф намного удобнее хранить в виде матрицы или набора матриц. Приведём для примера такие способы задания графа как матрица смежностей и матрица инцидентности. Однако для решения реальных задач на графах чаще используются другие методы хранения графа. Выбор того или иного способа зависит от поставленной задачи и возможностей для их решения[12].

Пусть в графе n вершин. Присвоим каждой вершине графа номер, и обозначим вершину с номером i (где $1 \leq i \leq n$) через v_i. Построим матрицу с n строками и

[12] Беглый поиск выдаёт список рёбер, список Бержа, список дуг, список смежности, а также много частных случаев структур, адаптированных под конкретные задачи.

n столбцами. На пересечении строки с номером i и столбца с номером j записывают количество ребер, которые соединяют эти вершины v_i и v_j. (Для простого графа это число может принимать только значения 0 и 1.) Такая матрица называется *матрицей смежности.*

Пример 3. Для графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, а $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$ матрицей смежности является следующая матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что для простого неориентированного графа такая матрица будет являться симметричной, а по главной ее диагонали будут расположены нули. При этом сумма чисел в строке с номером i будет в точности равна степени вершины v_i. Для ориентированного графа симметричность может нарушаться. При этом при вычислении исходящей степени вершины v_i нужно вычислить сумму в строке с номером i, а для вычисления входящей степени — в столбце с номером i.

Кроме матриц смежности на практике иногда используются также *матрицы инцидентности.* Для построения матрицы инцидентности необходимо отдельно занумеровать ребра графа. Обозначим число ребер через m, а ребро с номером j (здесь $1 \le j \le m$) — через e_j. Тогда матрица инцидентности состоит из n строк и m столбцов. Для неориентированного графа на пересечении строки с номером i и столбца с номером j записывают единицу, если вершина v_i и ребро e_j инцидентны.

Пример 4. Для графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, а $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$ матрицей инцедентности является следующая матрица (ребра занумерованы в том пордяке, в котором они перечислены при определении графа).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для простого неориентированного графа в каждом столбце матрицы инцидентности находится ровно две единицы, а сумма чисел в строке с номером i совпадает со степенью вершины v_i.

При задании матрицы инцидентности для ориентированного графа следует обращать внимание на то, является ребро e_j входящим в вершину v_i или исходящим. В первом случае на пересечении строки номер i и столбца номер j пишут минус единицу, а во втором — единицу. (При этом если ребро является одновременно входящим и исходящим, т.е. петлей, то принято писать ноль.) Таким образом, в каждом столбце матрицы инцидентности сумма чисел равна нулю. Количество единиц в строке с номером i равно исходящей степени вершины v_i, а количество минус единиц — входящей.

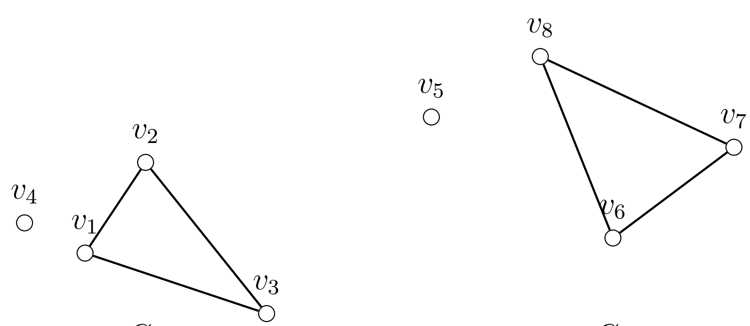
1.4 Изоморфизм графов

В этот раз мы поговорим о том, какие графы считаются «одинаковыми».

Пример 5. Рассмотрим графы $G_1 = (V_1, E_1)$, где $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, где $V_2 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$, $E_2 = \{(v_8, v_7), (v_8, v_6), (v_7, v_6)\}$. Являются ли эти графы одинаковыми?

Очевидно, что формально это разные графы. Однако если сопоставить вершины v_1 и v_8, v_2 и v_7, v_3 и v_6, v_4 и v_5, то можно отметить, что ребро между двумя вершинами в графе G_1 существует в том и только том случае, когда существует ребро между вершинами, сопоставленными этим вершинам, во втором графе.

Пример 6. Рассмотрим графы, изображенные ниже



G_1 G_2

Являются ли эти графы одинаковыми?

Аналогично предыдущему случаю можно сопоставить вершины v_1 и v_8, v_2 и v_7, v_3 и v_6, v_4 и v_5. Тогда будет и взаимооднозначное соответствие между ребрами. Отметим, что это не единственный способ сопоставить вершины так, чтобы графы при наложении совпали.

Графы из примеров 1 и 2 называются изоморфными. Дадим точное определение.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — простые неориентированные графы. Они называются изоморфными, если существует взаимооднозначное соответствие $\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$, такое, что для любой пары вершин u, v из V_1 ребро (u, v) содержится в E_1 в том и только том случае, когда ребро $(\varphi(u), \varphi(v))$ содержится в E_2. Отображение φ называется изоморфизмом.

Найдем некоторые необходимые условия существования изоморфизма между графами.

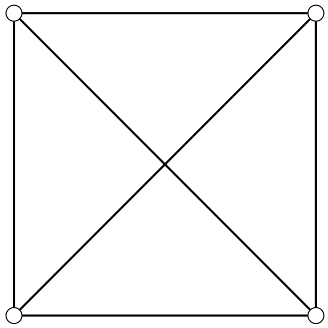
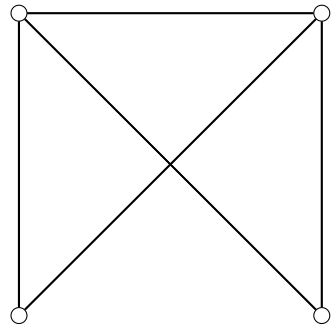
Пример 7. Рассмотрим следующую пару графов

Являются ли эти графы изоморфными?

Нет, для данной пары графов не существует взаимооднозначного соответствия между множествами вершин, поскольку число вершин в этих графах различно. Таким образом получаем следующее условие.

1. Число вершин в изоморфных графах одинаково.

Пример 8. Рассмотрим следующую пару графов

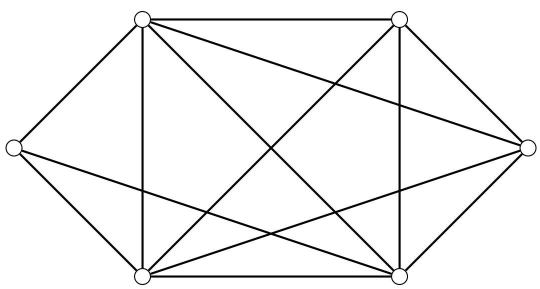
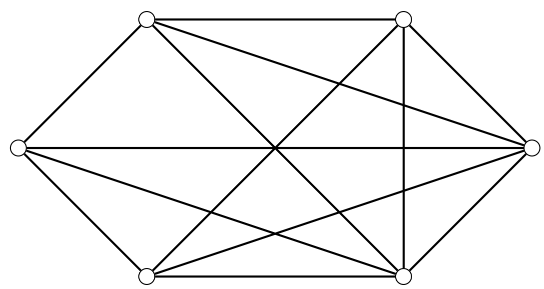



Являются ли эти графы изоморфными?

Графы не изоморфны. Если бы графы были изоморфными, то каждому ребру первого графа можно было бы поставить в соответствие ребро второго графа, причем различным ребрам сопоставлялись бы различные. А значит, число ребер изоморфных графов должно быть одинаково.

2. Число ребер в изоморфных графах одинаково.

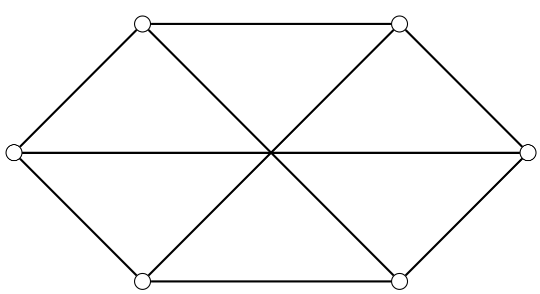
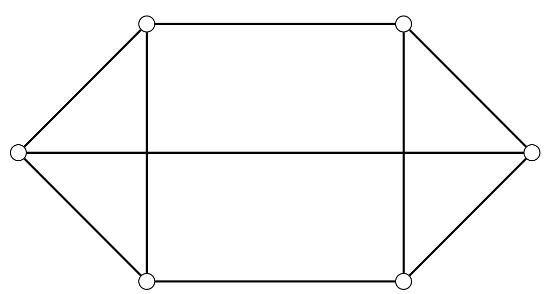
Пример 9. Рассмотрим следующую пару графов

Являются ли эти графы изоморфными?

3. Наборы степеней вершин в изоморфных графах одинаковы.

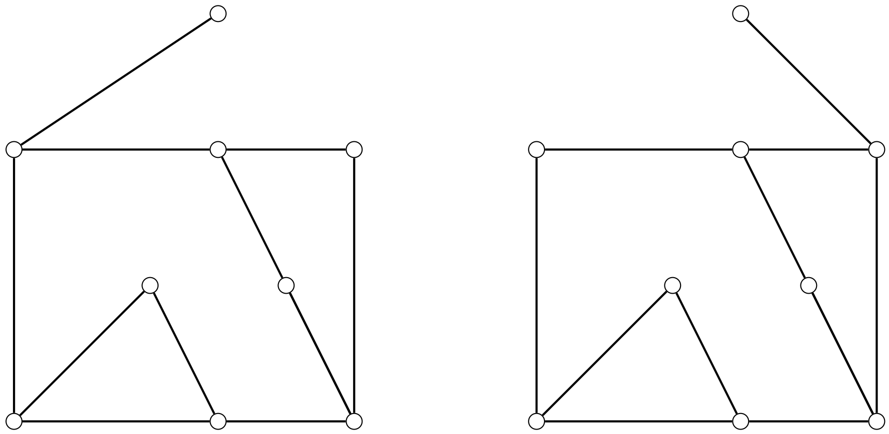
Пример 10. Рассмотрим следующую пару графов

Являются ли эти графы изоморфными?

4. Количество простых циклов длины k для всех $k = 3, 4, 5 \ldots$ в изоморфных графах совпадает.

Пример 11. Рассмотрим следующую пару графов



Являются ли эти графы изоморфными?

Все перечисленные выше необходимые условия в этих графах выполняются. Однако графы не являются изоморфными. Это говорит о том, что даже выполнение всех тех условий не является достаточноым для существования изоморфизма. А в данной паре графов во втором случае висячая вершина соединена с вершином, содержащейся в простом цикле длины 4, а в первом графе вершина, с которой соединена висячая, циклу длины 4 не принадлежит.

1.5 Деревья

Неориентированный связный граф без циклов называется *деревом.*

Утверждение 1. Пусть G — конечный обыкновенный (простой) граф. Тогда следующие высказывания равносильны:

1. Граф G является деревом.
2. В графе G любые две вершины соединены единственной цепью.
3. Граф G связен и число ребер на единицу меньше числа вершин.
4. Граф G связен, но при удалении любого ребра перестает быть связным.
5. Граф G не содержит циклов, но при добавлении любого ребра образуется цикл.
6. Граф G не содержит циклов и число ребер на единицу меньше числа вершин.

Обыкновенный (простой) граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество V его вершин можно разбить на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что любое ребро e из множества E соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множесва V_2.

Упражнение. Дерево является двудольным графом.

Утверждение 2. Дерево является двудольным графом.

Дадим полное аккуратное доказательство этого простого факта как пример того, как следует облекать в точные формулировки интуитивно понятные факты.

Доказательство. Рассмотрим дерево $G = (V, E)$. Покажем, что оно является двудольным графом.

По определению обыкновенный (простой) граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество V его вершин можно разбить на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что любое ребро e из множества E соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множесва V_2, или, другими словами, так, что никакие две вершины из одной доли не соединены ребром.

Разобьём множество V на два подмножества V_1 и V_2. Сначала зафиксируем произвольную вершину дерева $v_0 \in V$. Поскольку граф G является деревом, то для произвольной вершины v из V существует единственный путь, соединяющий вершины v_0 и v. Если длина этого пути является чётным числом, то отнесем вершину v ко множесву V_1, если же длина этого пути является нечётным числом, то отнесем вершину v ко множесву V_2. Таким образом получаем множества вершин V_1 и V_2, удовлетворяющие условиям: $V_1 \cup V_2 = V$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Покажем, что любые две вершины u_1 и u_2, соединеные ребром, лежат в разных долях множества V. Каждая из вершин u_1 и u_2 соединена с вершиной v единственным путем. Если вершины u_1 и u_2 соединены ребром, то длины путей от вершины v до верщин u_1 и u_2 отличаются ровно на 1 и, следовательно, имеют разную четность. Поэтому вершины u_1 и u_2 лежат в разных долях множества V.

Пусть $e \in E$, $e = (v_1, v_2)$, без ограничения общности будем считать, что $v_1 \in V_1$. Покажем, что $v_2 \in V_2$. Поскольку $v_1 \in V_1$, то вершины v_0 и v_1 соединяет путь чётной длины. Поскольку вершины v_1 и v_2 соединены ребром, то вершины v_0 и v_2 соединены путём нечётной длины. Поскольку G — дерево, то существует единственный путь, соединяющий вершины v_0 и v_2. Следовательно, $v_2 \in V_2$. А значит, дерево является двудольным графом. $\square$

Универсальный подход к определению графа, о котором говорилось на лекции

Графом будем называть тройку (V, E, ρ), где $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ — конечное или счетное множество, называемое *вершинами графа*, $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ — конечное или счетное множество, называемое *ребрами графа*, а отображение ρ каждому ребру e из множества E сопоставляет элемент из множества $V_2 \cup V^2$, где V_2 — множество всех двухэлементных подмножеств множества V, а $V^2 = V \times V$ — множество всех упорядоченных пар элементов из V.

Если $\rho(e) \in V_2$, т. е. $\rho(e)$ — неупорядооченная пара $\{v_1, v_2\}$ некоторых вершин v_1 и v_2 из V, то ребро e называется *неориентированным ребром*, а вершины v_1 и v_2 — *концами* ребра e.

Если $\rho(e) \in V^2$, т. е. $\rho(e)$ — упорядооченная пара (v_1, v_2) некоторых вершин v_1 и v_2 из V, то ребро e называется *ориентированным ребром* или *дугой*, а вершины v_1 и v_2 — *началом и концом* ребра e, соотвественно. Говорят, что дуга e выходит из вершины v_1 и входит в вершину v_2.

В обоих случаях говорят, что вершины v_1 и v_2 *инцидентны* ребру e.

Если $\rho(e) = (v, v)$ для некоторой вершины $v \in V$, то ребро e называется *петлей*. Понятно, что петлю можно считать как ориентированным ребром, так и неориентированным.

Граф, в котором все ребра неориентированные, называется *неориентированным.* Граф, в котором все ребра ориенированные, называется *ориентированным.* В графе одновременнно могут быть как неориенированные ребра, так и ориентированные.

Ребра $e_1, \ldots, e_s$, $s \geq 2$, удовлетворяющие условию $\rho(e_1) = \ldots = \rho(e_s)$, называются *кратными* или *параллельными.*

Граф, в котором нет кратных рёбер и петель, называется *простым.* Неориентированный граф, в котором нет кратных рёбер и петель, называется *обыкновенным.*

Обозначим через $\deg v$ число ребер, инцидентных вершине v (при этом петли считаются дважды). Вершина v называется *изолированной*, если $\deg v = 0$. Вершина v называется *концевой* или *висячей*, если $\deg v = 0$.

В ориентированном графе через $\deg_+ v$ и $\deg_- v$ обозначим число дуг, входящих в вершину v и выходящих из нее, соответственно.

Последовательность $v_{s_1}, e_{t_1}, v_{s_2}, e_{t_2}, \ldots, v_{s_k}, e_{t_k}, v_{s_{k+1}}$, $k \geq 1$, называется *путем* от вершины v_{s_1} (начало пути) к вершине $v_{s_{k+1}}$ (конец пути) длины k, если для любого i, $i = 1, \ldots, k$, либо $\rho(e_{t_i}) = \{v_{s_i}, v_{s_{i+1}}\}$, либо $\rho(e_{t_i}) = \big(v_{s_i}, v_{s_{i+1}}\big)$.

Путь, в котором нет повторяющихся вершин, называется *цепью.*

Путь, в котором нет повторяющихся ребер и совпадает начало и конец, называется *циклом.*

Неориентированный граф, в котором любые две вершины соединены путем, называется *связным.*

Планарные графы

Граф, который можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (нигде, кроме вершин), называется *планарным.*

Изображение планарного графа на плоскости без пересечений ребер называется *плоским.*

Теорема 3 (Л. Эйлер)**.** *Для плоского изображения планарного связного графа имеет место равенство* $B - P + \Gamma = 2$, *где* B *— число вершин,* P *— число ребер,* Γ *— число граней графа.*

Полный граф на 5 вершинах и двудолный граф с мощностью обеих долей 3, в котором любые две вершины из разных долей смежны, не являются планарными.

Утверждение 4. Для плоского связного графа, содержащего хотя бы два ребра, справедливо неравенство $2P \geq 3\Gamma$.

Утверждение 5. Любой плоский граф содержит вершину, степень которой не больше 5.

Пусть дан плоский граф.

Такое приписывание цвета каждой вершине графа, при котором любым двум вершинам, соединенным ребром, приписаны разные цвета, называется *правильной раскрасой графа.*

Такое приписывание цвета каждой грани графа, при котором любым двум граням, граничащам хотя бы по одному ребру, приписаны разные цвета, называется *правильной раскрасой карты.*

Утверждение 6. Любой плоский граф можно правильно раскрасить 6 красками.

Утверждение 7. Любой плоский граф можно правильно раскрасить 5 красками.

Утверждение 8. Гипотеза о том, что любой плоский граф можно правильно раскрасить 4 красками равносильна гипотезе о том, что любую карту можно правильно раскрасить 4 красками.