1 Линейные рекуррентные последовательности

Рассмотрим следующую задачу. Нужно найти число f_n наборов из нулей и единиц длины n, обладающие свойствами:

1) первый разряд набора равен единице;
2) последний разряд набора равен единице;
3) в наборе нет двух стоящих рядом нулей.

Последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $f_{n+2} = f_{n+1}+f_n$ и начальным условиям $f_1 = f_2 = 1$. Такая последовательность называется *последовательностью Фибоначчи* (в исходной задаче специально добавлены первые два условия, чтобы получилось именно эта последовательность, а не «сдвинутая»). Последовательность Фибоначчи возникает очень часто в самых разных областях математики. В частности, f_n равно количеству таких подстановок σ симметрической группы S_{n-1}, что для любого i, $1 \le i \le n-1$, выполняются неравенства $|i - \sigma(i)| \le 1$.

Последовательность Фибоначчи является частным случаем возвратных последовательностей, задаваемых линейными однородными соотношеними с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение такого соотношения.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ с элементами из $\mathbb{C}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$a_{n+k} = u_1 a_{n+k-1} + \ldots + u_{k-1} a_{n+1} + u_k a_n,$$

где $u_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, k$, $u_k \neq 0$. Тогда

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^n P_i(n), \qquad (*)$$

где λ_i — корень кратности r_i характеристического многочлена

$$x^k - u_1 x^{k-1} - \ldots - u_{k-1} x - u_k,$$

$P_i(n)$ — многочлен от переменной n степени $r_i - 1$, $i = 1, \ldots, s$. Коэффициенты многочленов P_i в количестве $r_1 + \ldots + r_s = k$ штук определяются из справедливости формулы $(*)$, например, для первых k членов последовательности.

Доказательство. Найдется такая константа c, что для любого n, $n \ge 1$, справедливо неравенство

$$|a_{n+1}| \le c \max_{0 \le i \le n} |a_i|.$$

Поэтому рост элементов последовательности по абсолютной величине не более чем степенной. Следовательно, переходя от последовательности $\{a_n\}$ к производящей функции $A(x)$ этой последовательности, получаем степенной ряд, абсолютно сходящийся в некоторой окрестности нуля.

Производящая функция $B(x)$ последовательности $\{b_n\}$, задаваемой при всех n равенством $b_{n+i} = a_n$, имеет такой вид:

$$B(x) = x^{-i}(A(x) - Q_{i-1}(x)),$$

где $Q_{i-1}(x)$ — многочлен степени $i - 1$, определяемый первыми i членами последовательности $\{a_n\}$.

Поэтому исходное рекуррентное соотношение дает следующее уравнение относительно производящей функции $A(x)$:

$$x^{-k}(A(x) - Q_{k-1}(x)) = \sum_{i=1}^{k-1} u_i x^{-(k-i)}(A(x) - Q_{k-i-1}(x)) + u_k A(x).$$

Домножим левую и правую часть этого равенства на x^k и соберем слагаемые, содержащие функцию $A(x)$ в левой части равенства:

$$A(x)\left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i x^i\right) = \tilde{Q}_{k-1}(x),$$

где $\tilde{Q}_{k-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $k-1$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — корни характеристического многочлена

$$x^k - u_1 x^{k-1} - \ldots - u_{k-1}x - u_k,$$

кратности $r_1, \ldots, r_s$, соответственно. Так как $u_k \neq 0$, то $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда, делая замену $x \to \frac{1}{y}$, получаем, что многочлен

$$1 - u_1 x - \ldots - u_{k-1}x^{k-1} - u_k x^k$$

имеет корни $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_s}$ кратности $r_1, \ldots, r_s$, соответственно. Следовательно,

$$A(x) = \frac{\tilde{Q}_{k-1}(x)}{(-u_k)\left(x - \frac{1}{\lambda_1}\right)^{r_1} \ldots \left(x - \frac{1}{\lambda_s}\right)^{r_s}} = \frac{(-\lambda_1)^{r_1} \ldots (-\lambda_s)^{r_s} \tilde{Q}_{k-1}(x)}{(-u_k)(1 - \lambda_1 x)^{r_1} \ldots (1 - \lambda_s x)^{r_s}}.$$

Используя разложение рациональной функции в сумму простейших дробей, получаем:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\alpha_{ij}}{(1 - \lambda_i x)^j},$$

где α_{ij}, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r_i$, — некоторые константы (вообще говоря, комплексные). Далее, для $i = 1, \ldots, s$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\alpha_{ij}}{(1 - \lambda_i x)^j} = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \lambda_i^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n x^n \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} \binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n P_i(n) x^n,$$

где $P_i(n)$ — некоторый многочлен от переменной n степени $r_i - 1$.

Таким образом,

$$A(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n P_i(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^n P_i(n)\right) x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях переменной x, получаем утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. *Линейное неоднородное соотношение с постоянными коэффициентами вида*

$$a_{n+k} - u_1 a_{n+k-1} - \ldots - u_{k-1} a_{n+1} - u_k a_n = f(n),$$

в случае, когда функция $f(n)$ является квазимногочленом (т. е. $f(n) = \lambda^n P(n)$, где $P(n)$ — многочлен от переменной n), решается методом производящих функций практически так же, как и однородное.

Возвращаясь к последовательности Фибоначчи $\{f_n\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальным условиям $f_1 = f_2 = 1$ (или, что то же самое, начальным условиям $f_0 = 0$, $f_1 = 1$), отметим, что характеристический многочлен $x^2 - x - 1 = 0$ последовательности Фибоначчи имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому, в силу доказанной теоремы, общим решением соотношения $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ будет такая совокупность последовательностей:

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Из начальных условий находим, что $c_1 = 1/\sqrt{5}$, $c_2 = -1/\sqrt{5}$. Таким образом,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Пример 1. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:
$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $a_0 = 10$, $a_1 = 16$.

Запишем характеристический многочлен последовательности и найдём его корни:

$$x^2 - 4x + 3 = 0;$$
$$x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Кратность корней равна единице, поэтому $P_1(n)$ и $P_2(n)$ — многочлены 1 степени, то есть константы. Таким образом, $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n$. Подставляя значения $a_0 = 10$ и $a_1 = 16$ имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 = 1^0 \cdot c_1 + 3^0 \cdot c_2; \\ 16 = 1^1 \cdot c_1 + 3^1 \cdot c_2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 10; \\ c_1 + 3c_2 = 16; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 7; \\ c_2 = 3. \end{array} \right.$$

Следовательно, $a_n = 7 \cdot 1^n + 3 \cdot 3^n = 7 + 3^{n+1}$.

Проверим (по индукции), что искомое соотношение выполняется:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n = 4(7 + 3^{n+2}) - 3(7 + 3^{n+1}) = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3^{n+2} - 3 \cdot 3^{n+1} = 7 + 3^{n+3}.$$

Пример 2. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:
$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, $a_0 = 6$, $a_1 = 6$. Запишем характеристический многочлен последовательности и найдём его корни:

$$x^2 - 6x + 9 = 0;$$
$$x_1 = x_2 = 3.$$

Кратность корня равна 2, поэтому $P(n)$ — многочлен 1 степени. То есть $P(n)$ имеет вид $c_1 n + c_2$. А значит, $a_n = (c_1 n + c_2) \cdot 3^n$. Подставляя значения $a_0 = 6$ и $a_1 = 6$ имеем:

$$\begin{cases} 6 = (c_1 \cdot 0 + c_2) \cdot 3^0; \\ 6 = (c_1 \cdot 1 + c_2) \cdot 3^1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 6; \\ (c_1 + c_2) \cdot 3 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -4; \\ c_2 = 6. \end{cases}$$

Следовательно, $a_n = (6 - 4n) \cdot 3^n$.

Проверим (по индукции), что искомое соотношение выполняется:

$$\begin{gathered} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n = 6(6 - 4(n+1)) \cdot 3^{n+1} - 9(6 - 4n) \cdot 3^n = \\ = (2(6 - 4(n+1)) - (6 - 4n))3^{n+2} = (12 - 8n - 8 - 6 + 4n)3^{n+2} = \\ = (-2 - 4n - 4 \cdot 2 + 8)3^{n+2} = (6 - 4(n+2)) \cdot 3^{n+2}. \end{gathered}$$

Пример 3. Пусть задано рекуррентное соотношение следующего вида:

$$\begin{gathered} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \\ x_1, x_2 \text{ — различные корни уравнения } x^2 + px + q = 0, \\ a_0, a_1 \text{ — первые два члена последовательности.} \end{gathered}$$

Покажем, что

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

где c_1 и c_2 удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a_0; \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = a_2; \end{cases}$$

Доказательство будем вести индукцией по n. База индукции — определение коэффициентов c_1 и c_2. Предположим, что для всех a_i, $i < n$ требуемое соотношение выполняется. Докажем его для a_n.

$$\begin{gathered} a_n = -pa_{n-1} - qa_n - 2 = -p(c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}) - q(c_1 x_1^{n-2} + c_2 x_2^{n-2}) = \\ {}_1 \cdot x_1^{n-2}(-px_1 - q) + {}_2 \cdot x_2^{n-2}(-px_2 - q) \end{gathered}$$

Поскольку x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1^2 = -px_1 - q$, $x_2^2 = -px_2 - q$. Следовательно,

$$a_n = c_1 x_1^{n-2} \cdot x_1^2 + c_2 x_2^{n-2} \cdot x_2^2 = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно рассматривать случай, когда степень характеристического уравнения больше двух.