

1 Определения и простейшие свойства комбинаторных объектов

С чего начинается комбинаторика? В каком-то смысле она начинается с ответа на вопрос: сколькими способами можно среди n элементов выбрать k элементов? На самом деле это не один вопрос, а четыре — выборка может быть упорядоченной и неупорядоченной, повторный выбор одного и того же элемента может допускаться, а может не допускаться. Упорядоченные выборки называются *размещениями* или *наборами*, а неупорядоченные — *сочетаниями*. Как правило, по умолчанию под выборкой понимается выборка без повторений, а если речь идет о выборке с повторениями, то это оговаривается явным образом.

1.1 Общие соображения

Если множество A содержит n элементов (то есть выбрать один элемент из множества A можно n способами), а множество B — m элементов (то есть выбрать один элемент из множества B можно m способами), и нужно выбрать один элемент из множества A и один элемент из множества B , то такой выбор можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Пример 1. В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать пару «юноша и девушка» среди присутствующих. Это можно сделать $6 \cdot 15 = 90$ способами.

Пример 2. В столовой имеется чай, кофе, компот, вода и 7 видов выпечки. Студентка собирается перекусить каким-нибудь напитком с булочкой. Она может выбрать перекус $4 \cdot 7 = 28$ способами.

Замечание. В советах «как все время одеваться по-разному при небольшом гардеробе» это правило используется постоянно (и каждый раз выдается за необыкновенное открытие). Например, если у девушки имеется 3 пары брюк, 2 юбки и 4 кофточки, то у неё имеется $(3 + 2) \cdot 4 = 20$ вариантов комплектов. А если к этому добавить пару жакетов, то число вариантов утраивается (можно пойти в одном из жакетов или без него).

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Обозначается $n!$. Для удобства считается, что $0! = 1$.

Можно определить факториал числа по индукции.

1. $0! = 1$.

2. $n! = n \cdot (n - 1)!$.

Итак, пусть есть n -элементное множество, например, $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Дадим ответ на вопрос о числе выборок k элементов из этого множества.

1.2 Упорядоченные выборки с повторениями (размещения с повторениями).

Пример 3. Пусть у нас имеются 20 различных карандашей и 7 ящиков (различных). Сколькими способами можно разложить карандаши по ящикам? Первый карандаш

можно положить в любой из семи ящиков, второй — тоже в любой из семи ящиков. И так каждый карандаш можно положить в любой из семи ящиков. Таким образом получаем, что всего имеется

$$\underbrace{7 \cdot \dots \cdot 7}_{20 \text{ раз}} = 7^{20} = 79\,792\,266\,297\,612\,001 \approx 8 \cdot 10^{16}$$

способов разместить 20 карандашей по 7 ящикам.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов и k ящиков. Тогда каждый предмет можно положить в любой из k ящиков. Следовательно, получаем, что всего имеется

$$\underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_n = k^n$$

способов разместить n предметов по k ящикам.

Пример 4. Аналогичным образом можно посчитать, сколько существует способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов. Действительно, поскольку каждый предмет можно раскрасить в любой из k цветов, то всего существует

$$\underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{15 \text{ раз}} = 10^{15}$$

способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов.

Пример 5. Пусть у нас имеется 15 различных деревянных игрушек. Сколькими способами можем их раскрасить в 5 цветов (каждую игрушку красим ровно в один цвет)?

Первую игрушку можем покрасить в один из 5 цветов, вторую — тоже в один из пяти цветов, и так каждую из 15 игрушек можем покрасить в один из 5 цветов. Всего получаем

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{15} = 5^{15} = 30\,517\,578\,125 \approx 3 \cdot 10^{10}.$$

Таким образом, число упорядоченных выборок с повторениями равно числу k -значных чисел в системе счисления по основанию n , т. е. равно

$$n^k.$$

1.3 Упорядоченные выборки без повторений (размещения).

Пример 6. Пусть у нас имеется 10 различных новогодних подарков и 15 различных подарочных пакетов. Любой подарок можно положить в любой пакет. Сколько существует способов упаковать подарки? Как и в предыдущих задачах, первый подарок можно положить в любой из 15 пакетов. Для второго подарка останется на выбор 14 пакетов. Для третьего — 13, для последнего — 6. Таким образом, существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 = 10\,897\,286\,400 \approx 10^{10}$ способов упаковать подарки. Используя обозначение факториала, это значение можно записать следующим образом.

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{15!}{5!}.$$

Аналогичное соотношение получим для n подарков и k пакетиков. Первый подарок можно упаковать в любой из k пакетов, второй — в любой из оставшихся $k - 1$ пакетов, третий — в один из оставшихся $k - 2$ пакетов, ..., последний — в любой из оставшихся $k - n + 1$ пакетов. Поэтому всего будет

$$\begin{aligned} k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot (k - n + 1) &= \\ &= \frac{k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot (k - n + 1) \cdot (k - n) \cdot (k - n - 1) \cdot \dots \cdot 1}{(k - n) \cdot (k - n - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{k!}{(k - n)!} \end{aligned}$$

способов упаковать подарки.

Пример 7. В гостинице 15 одноместных номеров. Сколько способов существует расселить 5 постояльцев по этим номерам (каждый постоялец собирается жить в отдельном одноместном номере). Первого постояльца можно поселить в одну из 15 комнат, второго — в одну из 14, третьего — в одну из 13, четвертого — в одну из 12, пятого — в одну из 11. Поэтому всего существует $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$ способов расселить 5 постояльцев в 15 одноместных номеров.

Пример 8. Сколько существует последовательностей из 0 и 1 длины n , содержащих k нулей и $n - k$ единиц?

Перестановки.

Пример 9. На карточках написаны числа от 1 до 7. Посмотрим, сколькими способами можно выложить эти карточки в ряд. На первое место можно поместить одну из семи карточек. На второе — одну из шести, ..., на предпоследнее — одну из двух, на последнее — одну оставшуюся карточку. Таким образом, всего существует $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способов выложить 7 карточек в ряд.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n различных предметов. Сколькими способами можно их упорядочить (пронумеровать)? На первое место можно поместить любой из n предметов, на второе — любой из оставшихся $n - 1$ предметов, ..., на k -е место можно поместить любой из оставшихся $n - k + 1$ предметов, ..., на последнее — один оставшийся предмет. А значит, всего существует $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ способов упорядочить n различных предметов.

Пример 10. Занятие у вас закончилось чуть раньше и никого больше в столовой нет (8 юношей, 14 девушек). Сколькими способами вы можете выстроиться в очередь? В соответствии с рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}$$

способов.

Пример 11. А если на первое место пропустим одну из девушек? Тогда первый человек может быть выбран 14 способами, второй — 21 способом, третий — 20 способами, ..., предпоследним может быть один из двух, а в конце встает оставшийся. Получаем

$$14 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 14 \cdot 21! \approx 7 \cdot 10^{20}.$$

1.4 Неупорядоченные выборки без повторений (сочетания).

Пример 12. На полке стоит 15 различных книжек, а в сумку помещаются только 3. Сколькими способами можно взять 3 книжки с полки (в сумку)?

Предположим сначала, что расположение (порядок) книжек в сумке важен. Тогда первую книжку мы можем взять одну из 15, вторую — одну из 14, третью — одну из оставшихся 13. То есть всего $15 \cdot 14 \cdot 13$ способов. Пусть мы взяли книжки A, B, C . Если они у нас лежат в сумке «кучей», то упорядочить мы их можем $3! = 6$ способами. Значит, каждому беспорядочному набору из 3 книжек соответствует 6 упорядоченных наборов. Важно отметить, что разным неупорядоченным наборам соответствуют разные упорядоченные наборы. Число упорядоченных наборов мы знаем, поэтому получаем, что число «кучек» равно

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Обобщим эту задачу. Пусть у нас имеется n предметов, нам нужно выбрать k из них. Если бы был важен порядок предметов (например, книги на полке), то было бы $\frac{n!}{(n-k)!}$ способов сделать выбор. Поскольку k предметов можно упорядочить $k!$ способами, то каждой неупорядоченной выборке из k предметов соответствует $k!$ упорядоченных наборов. А значит, существует $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ способов выбрать k элементов из n .

Другими словами, одной неупорядоченной выборке k элементов без повторений соответствует $k!$ упорядоченных выборок без повторений, то число сочетаний из n элементов по k элементов, обозначаемое C_n^k , при $n \geq k \geq 0$ равно

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

1.5 Неупорядоченные выборки с повторениями (сочетания с повторениями).

Пример 13. Преподаватель берёт перед занятиями 10 маркеров. Они могут быть красными, синими, черными и зелеными. Сколько способов взять набор из 10 маркеров существует? Все маркеры одного цвета одинаковые.

Давайте возьмем 10 маркеров и разложим по 4 «ящикам с краской». У нас получится примерно следующее:

$$\underbrace{|\text{ooo}|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{oo}|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{ooo}|}_{\text{з}}$$

или так:

$$\underbrace{|\text{ooooo}|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oooo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{o}|}_{\text{з}}$$

или даже так (все-таки черный цвет маркера на лекции предпочтительен):

$$\underbrace{|\text{ }|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{ooooooooo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{з}}$$

В любом случае у нас имеется 10 маркеров и 3 «разделителя по цветам» (крайние вертикальные палочки положения не меняют), которые мы и располагаем на 13 последовательных местах. А значит, нам надо выбрать из 13 мест 3 для «разделителей», а остальные заполнить «маркерами-кружочками» единственным способом. Сделать это можно $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$ способами.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется n предметов которые мы хотим разложить по k ящикам (или, что то же самое, раскрасить в k цветов). Тогда опять же, нам n предметов и $k - 1$ разделитель надо упорядочить на $n + k - 1$ месте. Выбрать места для «разделителей» можно C_{n+k-1}^{k-1} способами. На остальные n мест n одинаковых предметов размещаются единственным образом. Следовательно, существует C_{n+k-1}^{k-1} способов разложить n предметов по k ящикам.

Если говорить о выборке, то получается, что на каждом шаге мы выбираем «ящик» («цвет»), которые могут повторяться, и для которых не важен порядок выбора.

Между множеством всех сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов и множеством всех двоичных наборов длины $n + k - 1$ с k нулями следующим образом можно установить взаимно однозначное соответствие: выборке, в которой k_1 единиц, k_2 двоек, \dots , k_n чисел n , $k_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$), $k_1 + \dots + k_n = k$, соответствует набор, в котором сначала расположены k_1 нулей, а затем последовательно для $i = 2, \dots, n$ расположены наборы, состоящие из единицы и стоящих вслед за ней k_i нулей:

$$\underbrace{0 \dots 0}_k 1 \underbrace{0 \dots 0}_k 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_k.$$

Таким образом, число искомых выборок равно числу C_{n+k-1}^k сочетаний из $n + k - 1$ элементов по k элементов, т. е. числу

$$\frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! k!}.$$

Обобщим имеющиеся результаты. Пусть у нас есть выборка k предметов из n . Тогда число способов считается следующим образом, в зависимости от того, упорядоченная ли выборка и есть ли повторения.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

1.6 Ещё примеры

Пример 14. Молодые люди решили пропустить всех девушек вперед (см. пример 10). Тогда очередь распадается на две части. Сначала упорядочиваем всех девушек $14!$ способами, а потом всех юношей $8!$ способами. Используя правило произведения получаем, что выстроить существует

$$14! \cdot 8! = 87\,178\,291\,200 \cdot 40\,320 = 3\,515\,028\,701\,000\,000 \approx 3.5 \cdot 10^{15}$$

способов выстроиться в очередь таким образом.

Пример 15. Посчитаем теперь способы поставить нашу группу из n человек другим способом. Теперь будем выбирать не следующего человека, которого ставим в очередь, а место в очереди для следующего человека, а люди пусть у нас как-то уже занумерованы. Первого человека можем поставить к кассе и все. Второго — либо перед первым, либо после. Третьего — к кассе, между двумя предыдущими или в конец. При этом каждый следующий человек делит «свой кусочек очереди» на две части. Поэтому k -го человека можно поставить на k мест. Следовательно, и при таком способе подсчета вариантов имеем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$.

Пример 16. Пусть в столовой открылась вторая и третья кассы. Теперь первого человека можем поставить в одну из 3 касс — три способа. Второго — либо в одну из двух пустых касс, либо в кассу, где стоит первый, причем двумя способами: до или после него. Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = \\ &= \frac{24!}{2!} = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000 \approx 6 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$

способов поставить 22 человека в 3 кассы.

Обобщим этот пример. Теперь мы хотим поставить n человек в k касс. Первого человека можем поставить в любую из k касс. Также как и в предыдущих случаях, Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1) &= \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)k(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \end{aligned}$$

способов поставить n человек в k очередей.

Пример 17. Посчитаем, сколькими способами можно расставить 7 книг на 3 полках. В данном случае нам порядок важен, поэтому задача похожа на расстановку людей в очереди. В таком случае получаем

$$3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 = \frac{9!}{2} = 181\,440$$

способов расставить 7 книг на 3 полках.

Обобщая, получим следующую формулу для упорядоченных выборок без повторений. Первый элемент можно выбрать n способами, второй элемент — $n - 1$ способами, ..., k -й элемент — $n - k + 1$ способами. Таким образом общее число способов выбора равно

$$n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

									1												
								1		1											
							1		2		1										
						1		3		3		1									
					1		4		6		4		1								
				1		5		10		10		5		1							
			1		6		15		20		15		6		1						
		1		7		21		35		35		21		7		1					
	1		8		28		56		70		56		28		8		1				
		1		9		36		84		126		84		36		9		1			
1			10		45		120		210		252		210		120		45		10		1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1.7.2 Свойства сочетаний с повторениям.

1. Число неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = k$$

равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C_{n+k-1}^k .

2. Число монотонных отображений¹⁾ из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$ равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов, т. е. равно C_{n+k-1}^k .

▷ Между множеством из всех C_{n+k-1}^k двоичных наборов длины $n+k-1$ с k единицами и множеством монотонных отображений из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$ следующим образом установим взаимно однозначное соответствие. Пусть в наборе длины $n+k-1$ с k единицами число нулей до первой единицы равно r_1 , число нулей, расположенных между единицами с номерами $i-1$ и i , $i = 2, \dots, k$, равно r_i :

$$\underbrace{0 \dots 0}_{r_1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{r_2} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{r_k} 1 0 \dots 0.$$

Соответствующее этому набору монотонное отображение f из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$ задается таким образом:

$$f(s) = 1 + \sum_{i=1}^s r_i, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Легко понять, что и по монотонному отображению исходный набор восстанавливается однозначно. □

3. Для любого натурального n при $0 < |x| < 1$ справедливо равенство

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

▷ Установим коэффициент при слагаемом x^k после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots) \dots (1+x+x^2+\dots)}_{n \text{ раз}}.$$

¹⁾ Отображение f называется *монотонным*, если для любых a и b из области определения отображения f из неравенства $a \leq b$ следует неравенство $f(a) \leq f(b)$.

Если какое-либо выражение в скобках не дает «вклад» в конкретное слагаемое x^k , то считаем, что это выражение не входит в выборку, а если дает вклад x^s , $1 \leq s \leq k$, то — входит с кратностью s . Тогда коэффициент при x^k совпадает с числом сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов. \square

Теперь преобразуем выражение из свойства 3 сочетаний с повторениями следующим образом:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!} x^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-x)^k.\end{aligned}$$

Таким образом, формулы из свойства 5 сочетаний и из свойства 3 сочетаний с повторениями являются частными случаями известного из курса математического анализа и справедливого для любого действительного α при $0 < |x| < 1$ разложения

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что для всех целых неотрицательных n и k верно равенство

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

2 Формула включений-исключений

Для начала разберём задачу:

Пример 18. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7.

Для решения этой задачи посчитаем все числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, а потом вычтем это количество из 1000. Для начала посчитаем, сколько положительных чисел, не превосходящих 1000, делится на 2, 3, 5 и 7 по-отдельности:

$$N_2 = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500; \quad N_3 = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333; \quad N_5 = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200; \quad N_7 = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142.$$

Если мы будем считать сумму этих чисел, то некоторые числа (например, 6, 10, 14, 30) будут посчитаны несколько раз. Чтобы учесть это, посчитаем количество чисел, которые делятся на 2 числа:

$$\begin{aligned}N_{23} &= \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166; & N_{25} &= \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100; & N_{27} &= \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor = 71; \\ N_{35} &= \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66; & N_{37} &= \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47; & N_{57} &= \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28.\end{aligned}$$

А также на 3 числа:

$$N_{235} = \left[\frac{1000}{30} \right] = 33; \quad N_{237} = \left[\frac{1000}{42} \right] = 23; \quad N_{257} = \left[\frac{1000}{70} \right] = 14; \quad N_{357} = \left[\frac{1000}{105} \right] = 9.$$

Наконец, на все 2, 3, 5 и 7 будет делиться $N_{2357} = \left[\frac{1000}{210} \right] = 4$ числа.

Тогда чисел, которые делятся на 2, 3, 5 и 7 будет

$$(N_2 + N_3 + N_5 + N_7) - (N_{23} + N_{25} + N_{27} + N_{35} + N_{37} + N_{57}) + \\ + (N_{235} + N_{237} + N_{257} + N_{357}) - N_{2357} = (500 + 333 + 200 + 142) - \\ (166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28) + (33 + 23 + 14 + 9) - 4 = 772.$$

Покажем, что в этой сумме учтено каждое число, которое делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, причём ровно по одному разу. Рассмотрим 4 случая:

1. Пусть некоторое число делится только на одно из чисел 2, 3, 5 или 7. Тогда оно будет учтено только один раз в первой скобке.
2. Пусть некоторое число делится ровно на два числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 3 и на 5 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в N_3 и в N_5 со знаком «+» и в N_{35} со знаком «-». А значит, всего оно будет учтено один раз.
3. Пусть некоторое число делится ровно на три числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 2, на 5 и на 7 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в N_2 , в N_5 и в N_7 со знаком «+», в N_{25} , N_{35} и N_{57} со знаком «-» и в N_{257} со знаком «+». Следовательно, это число будет учтено один раз.
4. Пусть некоторое число делится ровно на 2, 3, 5 и 7. Тогда это число учитывается в каждом слагаемом. В выражении 8 положительных и 7 отрицательных слагаемых, а значит, это число также будет учтено ровно один раз.

Таким образом, число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, равно $1000 - 772 = 228$.

В примере 18 фактически использовалась формула включений-исключений. Рассмотрим её в общем виде.

Пусть есть N предметов и свойства p_1, \dots, p_n . Каждый предмет может одними свойствами обладать, а другими не обладать. Обозначим через N_{i_1, \dots, i_k} количество предметов, которые обладают свойствами p_{i_1}, \dots, p_{i_k} (обладание остальными свойствами — произвольное).

Через $N(r)$ обозначим число предметов, обладающих ровно r свойствами. Положим

$$S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N_{i_1, \dots, i_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Здесь особо отметим, что S_k — просто удобные обозначения, способствующие уменьшению громоздкости выкладок, не стоит за ними усматривать какой-то сакраментальный смысл.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$N(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Покажем, что каждый предмет дает одинаковый вклад при подсчете левой и правой частей устанавливаемого равенства.

Пусть предмет не обладает ни одним свойством. Тогда вклад в левую часть будет равен 1, вклад в правую часть будет ненулевым только в слагаемое $S_0 = N$, соответствующее мощности множества всех предметов, и этот вклад тоже равен 1.

Пусть предмет обладает s свойствами, $1 \leq s \leq n$, и это свойства p_{j_1}, \dots, p_{j_s} . Тогда данный предмет дает ненулевой (единичный) вклад в слагаемое N_{i_1, \dots, i_t} тогда и только тогда, когда верно включение

$$\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}.$$

Вклад этого предмета в левую часть равен нулю, а в правую —

$$\sum_{t=1}^s (-1)^t C_s^t,$$

т. е. вклад тоже нулевой.

Суммируя по всем предметам доказанные равенства вкладов в левую и правую часть, получаем справедливость исходного равенства. \square

Переформулируем формулу включений-исключений в терминах множеств.

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}|. \end{aligned}$$

Пример 19 (задача о беспорядках). Найти точное значение числа подстановок σ симметрической группы S_n , удовлетворяющих условию $\sigma(i) \neq i$ для всех i , $1 \leq i \leq n$.

Что произойдет, если сумму из правой части формулы включений-исключений оборвать на каком-либо слагаемом? Оказывается, что если последнее выписанное слагаемое положительное (точнее, оно соответствует четному числу свойств), то получается оценка величины $N(0)$ сверху, а в противном случае — снизу.

Теорема 2 (Неравенства Бонферрони). *Для любого l , $0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$*

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k \leq N(0) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k.$$

Доказательство. Для каждого из неравенств подобно доказательству формулы включений-исключений достаточно установить соответствующее неравенство для вкладов в левую и правую часть доказываемого соотношения каждого из предметов. Нужное неравенство легко следует из равенства

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t$$

(третье равенство свойства 6 сочетаний). □

Также аналогично формуле включений-исключений можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$N(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k,$$

где $N_{\geq r}$ — количество предметов, обладающих не менее чем r свойствами.

Пример 20. Доказать теорему 3.

Обозначим через $\varphi(m)$ функцию Эйлера, численно равную количеству натуральных чисел, не превосходящих m и взаимнопростых с m .

Теорема 4. Пусть $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ — разложение числа m на простые множители. Тогда

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Доказательство. Применим формулу включений-исключений, положив $N = m$ и считая i -м свойством делимость на p_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(m) = N(0) &= m - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{m}{p_i} + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + \dots \\ &\dots + (-1)^n \frac{m}{p_1 \dots p_n} = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \end{aligned}$$

□