1 Множества

1.1 Основные определения

Понятие множества относится к первичным понятиям, так как нет других, более простых понятий для их определения[1]. Чаще всего под этим словом подразумевается примерно то же самое, что и под словами совокупность, семейство, неупорядоченный набор каких-либо предметов, понятий, объектов. Важно, что эти предметы (понятия, объекты) не повторяются и не упорядочены.

Предметы (понятия, объекты), входящие в множество A, будут называться элементами множества A. Отметим, что множества могут быть сами элементами другого множества. Для выражения того факта, что некоторый элемент *a принадлежит* (соответственно, *не принадлежит*) множеству A используется обозначение $a \in A$ (соответственно, $a \notin A$).

Пример 1. Рассмотрим множество студентов группы 212 образовательной программы ФиКЛ. Элементами этого множества являются студенты. При этом сама группа, например, входит в множество групп первого курса факультета гуманитарных наук. Если же мы рассмотрим, например, множество объектов, относящихся к первому курсу НИУ ВШЭ и имеющие электронные адреса, то в это множество попадут и собственно студенты группы 212, и сама группа 212 как отдельный элемент.

Как мы можем задавать или описывать множества? Выделим два способа. Во-первых, это перечисление его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки[2].

Пример 2.

$$A = \{\text{Петя, Вася, Маша}\}, \qquad B = \{0, 3, 15, 28\},$$
$$C = \{\text{Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Пермь}\}.$$

Список студентов группы можно также рассматривать как задание множества всех студентов определённой группы перечислением.

Во-вторых, это описание множества, его характеристик и свойств.

Пример 3.

D — множество студентов 1 курса ФГН, посещающих курс дискретной математики;

E — множество чисел, удовлетворяющих равенству $x(x-3)(x-15)(x-28) = 0$;

F — множество городов, в которых есть кампусы НИУ ВШЭ;

G — множество всех городов России;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел.

[1] Тут напрашивается некоторое сравнение с толковым словарём, в котором получается либо «зацикленность» статей, либо какие-то слова остаются необъяснёнными.

[2] В фигурные скобки принято заключать неупорядоченные наборы элементов. Если же набор элементов упорядочен, то его обычно заключают в круглые скобки. В качестве примера упорядоченного набора можно вспомнить запись набора координат точки или вектора.

Два множества A и B считаются *равными* в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств A и B обозначается $A = B$.

Пример 4. Равными являются множества B и E, C и F из примеров 2 и 3.

Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то A называется *подмножеством* множества B. Будем обозначать этот факт как $A \subseteq B$. Для строгого включения, то есть когда A является подмножеством множества B, но не совпадает с множеством B, будем использовать обозначение[3] $A \subsetneq B$.

Пример 5. Среди множеств из примеров 2 и 3 некоторые являются подмножествами других. Так, например, $B \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $C \subseteq G$, а также $B \subseteq E$, $E \subseteq B$.

Отметим следующие свойства, которые следуют напрямую из определений. Пусть A, B, C — произвольные множества.

1. Рефлексивность. Каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subseteq A$.

2. Транзитивность. Если одно множество является подмножеством другого, а то, в свою очередь, является подмножеством третьего, то первое множество является подмножеством третьего. Из соотношений $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует включение $A \subseteq C$.

3. Множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого: $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Последним свойством часто пользуются для доказательства равенства множеств. Сначала доказывают тот факт, что первое является подмножеством второго, а потом то, что второе является подмножеством первого. Другими словами, для произвольного элемента из первого множества показывают, что он является элементом второго множества и наоборот.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется *пустым* и обозначается через[4] $\varnothing$.

Отметим свойства пустого множества, следующие непосредственно из его определения. Пусть A — произвольное множество. Тогда выполняются следующие соотношения.

1. Пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subseteq A$.

2. Если какое-то множество является подмножеством пустого множество, то оно само является пустым множеством: если $A \subseteq \varnothing$, то $A = \varnothing$.

Пример 6. Найдём все подмножества множества $\{0, 1, 2\}$. Это $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ $\{0, 1, 2\}$.

---

[3] Обозначение $A \subset B$ в разных источниках может использоваться как для обозначения произвольного подмножества, так и для обозначения строгого включения, то есть такого, когда множество A является подмножеством множества B, но не совпадает с множеством B.

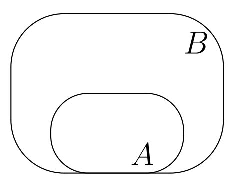
[4] Отметим, что пустое множество единственное для любых задач и описаний. Например, если мы в одном случае говорим про студентов, а в другом случае — про книги, то в обоих случаях пустое множество будет одно и то же.

Рассмотрим более общий случай. Пусть множество A содержит n элементов. Тогда существует 2^n подмножеств множества A (включая само множество A и пустое множество). Действительно, каждый элемент множества A содержаться в его подмножестве или не содержаться, то есть для каждого из n элементов есть два варианта «его состояния» отностиельно подмножества множества A. А значит, всего $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n}$ вариантов различных подмножеств.

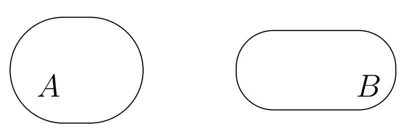
Очень полезным оказывается схематическое (графическое) изображение множеств. Для множества A рисуем некоторую фигуру (которую нам удобно, чаще всего получается некоторое подобие круга). Точки этой фигуры или некоторые точки внутри этой фигуры будут обозначать элементы множества A. Если необходимо рассматривать несколько множеств, то нужно нарисовать соответствующее число фигур.

Такие изображения называются кругами Эйлера[5] Они помогают наглядно представить себе взаимное расположение множеств и подсказать возможные пути решения, однако их нельзя использовать для строгих доказательств (в том числе и в решении задач недостаточно приводить лишь изображение множеств кругами Эйлера).

Пример 7. Если мы знаем, что множество A является подмножеством множества B, то естественными изображением будет примерно такое:



Если же мы знаем, что множества A и B не содержат общих элементов, то стоит так и изображать:



1.2 Операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств A или B и только из них. Объединением множеств A и B обозначается $A \cup B$.

[5]В некоторых источниках, особенно переводных источниках можно чаще встретить понятие «Диаграммы Венна».

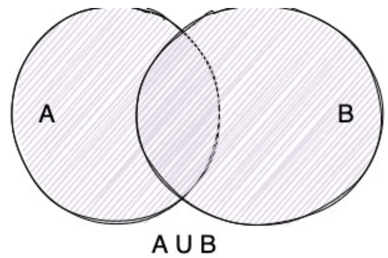


Рис. 1:

Пример 8. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые одновременно принадлежат множеству A и множеству B, и только из них. Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$. Также достаточно распространённым для пересечения множеств является обозначение AB.

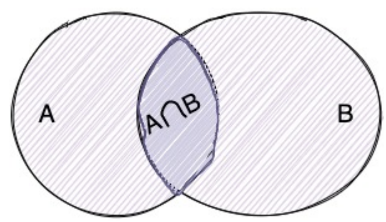


Рис. 2:

Пример 9. Пусть A — множество символов заглавных букв русского алфавита, B — множество заглавных букв английского алфавита. Тогда[6]
$A \cap B =${A, B, C, E, H, K, M, O, P, T, X}.

[6]Для определённости считаем, что символы Y и У различны.

Разностью множеств A и B называется множество тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Разность множеств A и B обозначается $A \backslash B$.

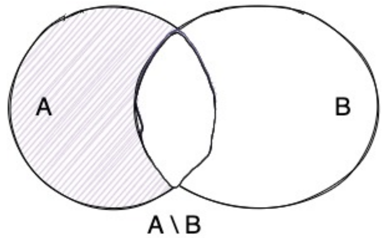


Рис. 3:

Пример 10. Рассмотрим множества A и B из примера 9. Тогда

$$A \backslash B = \{\text{Б, Г, Д, Ё, Ж, З, И, Й, Л, П, У, Ф, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я}\}$$
$$B \backslash A = \{\text{D, F, G, I, J, L, N, Q, R, S, U, V, W, Y, Z}\}$$

Дополнением множества A (или отрицанием множества A) называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству A. Обозначается $\overline{A}$. Операция дополнения подразумевает некое универсальное множество U, такое что $A \subseteq U$.

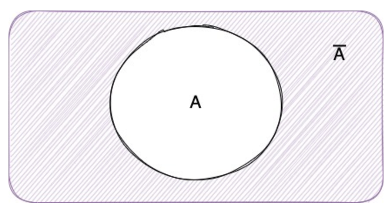
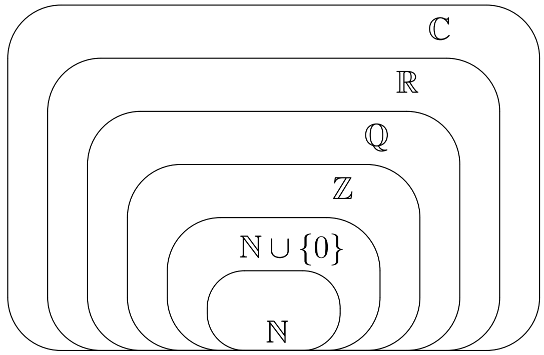


Рис. 4:

Если в задаче речь идёт о нескольких множествах, то универсальное множество должно содержать их все. Кроме того, универснальное множество не должно быть слишком большим: если мы говорим про множество целых чисел, то включать в универсальное множество иррациональные числа, геометрические фигуры, окна здания или преподавателей дискретной математики не имеет смысла. Во многих задачах в качестве универсальных множеств удобно использовать следующие множества:
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,
$\mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество целых неотрицательных чисел,
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. В зависимости от контекста задачи для множества натуральных чисел универсальным множеством могут быть следующие множества: $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Нетрудно заметить следующие включения:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$



Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B. Симметрическая разность множеств A и B обозначается $A \triangle B$. Симметрическую разность можно определить также следующим образом: $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Нетрудно видеть, что $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

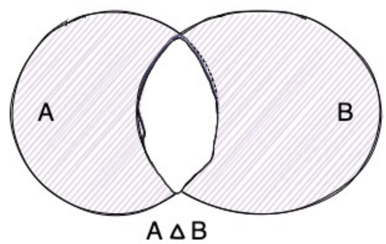


Рис. 5:

Пример 11. Рассмотрим множества A и B из примера 8. Тогда $A \triangle B = \{2, 4, 7, 9, 11\}$

Свойства операций над множествами. Пусть A, B, C — произвольные множества, U — (универсальное) множество, такое что $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$.

1. Идемпотентность[7]. $A \cap A = A \cup A = A$ (объединение множество с самим собой, как и пересечение с самим собой, сохраняет исходное множество)

2. Если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ (если одно из множеств является подмножеством другого, то вложенное множество является их пересечением, а включающее — их объединением).

3. Свойства нуля. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (пересечение любого множества с пустым множеством снова даёт пустое множество), $A \cup \varnothing = A$ (объединение любого множества с пустым множеством не меняет исходное множество). Отметим, что это является частным случаем свойства 2.

4. Свойства единицы. $A \cap U = A$ (пересечение любого множества с универсальным множеством даёт исходное множество), $A \cup U = U$ (объединение любого множества с универсальным множеством даёт универсальное множество). Отметим, что это является частным случаем свойства 2.

[7]Названия запоминать необязательно, но бывает, что с называниями запоминать проще. *Например, кому-то может быть интересна этимология слов.*

5. Коммутативность или «переместительный закон». $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \triangle B = B \triangle A$ (от перестановки компонент при объединении, пересечении и симметрической разности множеств результат не меняется).

6. Ассоциативность или «сочетательный закон». $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (выполнение объединений (пересечений, симметрических разностей) в произвольном порядке; это свойство позволяет опускать скобки, если записывается несколько объединений (пересечений, симметрических разностей) подряд).

7. Дистрибутивность или «распределительный закон». $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (объединение пересечения двух множеств с третьим совпадает с пересечением объединений третьего множества с каждым из первых двух),
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (пересечение объединения двух множеств с третьим совпадает с объединением пересечений третьего множества с каждым из первых двух).

8. Законы де Моргана. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (дополнение к объединению множеств совпадает с пересечением дополнений этих множеств),
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (дополнение к пересечению множеств совпадает с объединением дополнений множеств).

9. Закон двойного дополнения (отрицания?). $\overline{\overline{A}} = A$. Дополнение дополнения множества A совпадает с самим множеством A.

На всякий случай напомним, что все равенства работают в обе стороны. Так, например, для некоторых преобразований бывает удобно вместо множества A записывать $\overline{\overline{A}}$, а, например, дистрибутивность — это не только «раскрытие скобок», но и «вынесение за скобки общего множителя». *Как-то надо это отметить, а то есть такая проблема — об этом забывают...*

2 Отображения и мощности множеств

2.1 Отображения множеств

Пусть заданы множества X и Y. Отображением ϕ множества X в множество Y называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y. Часто используется обозначение $\phi : X \to Y$.

Пример 12. Знакомые из школьного курса математики функции, заданные на множестве действительных чисел $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являются примерами отображений. Например $f(x) = x^2$; $f(x) = \sin x$.

Пример 13. Отображение из множества натуральных чисел в множество чётных чисел: $1 \to 2$, $2 \to 4, \ldots$, $s \to 2s$, $\ldots$ (каждому числу ставится в соответствие в два раза большее число)

Пример 14. Отображение множества студентов НИУ ВШЭ в множество номеров студенческих билетов.

Выделяют следующие типы отображений:

Сюръективное отображение (*сюръекция, отображение «на»*) — отображение вида $f : X \to Y$, при котором для любого элемента y из множества Y найдётся элемент x из множества X, такой что $f(x) = y$.

Рассмотрим следующий пример-иллюстрацию. Пусть у нас есть раздевалка для верхней одежды, в которой куртки (будем считать, что там только куртки) как-то висят на крючках. Тогда мы имеем отображение множества курток на множество крючков. Отображение сюръективно, если все крючки заняты (но на некоторых может висеть больше одной куртки).

Инъективное отображение (*инъекция, отображение «в»*) — отображение вида $f : X \to Y$, при котором различным элементам множества X поставлены в соответствие различные элементы множества Y. Иными словами, в любой элемент y из множества Y отображается либо один элемент из множества, либо таких элементов нет вообще.

Для примера с раздевалкой отображение сюръективно, если ни на каком крючке висит не больше одной куртки (но могут быть пустые крючки).

Биективное отображение (*биекция, взаимо однозначное отображение*) — отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным.

Для примера с раздевалкой отображение биективно, если на каждом крючке висит ровно одна куртка.

Пример 15. Отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу $n \to 2n$ является инъекцией.

Пример 16. Отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по правилу $n \to -n$ является биекцией.

Пример 17. Отображение $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ по правилу $x \to \sin x$ является сюръекцией.

2.2 Мощность множеств

Множества X и Y называют *равномощными*, если можно построить взаимно однозначное отображение из множества X в множество Y. Отметим, что два конечных множества, равномощны тогда и только тогда, когда они состоящих из одного и того же числа элементов.

Для бесконечных множеств понятие «число элементов» неприменимо, поэтому используется его обобщение. Мощность множества — характеристика как конечных, так и бесконечных множеств, обобщающая понятие «число элементов» множества.

Среди бесконечных множеств выделим два «эталонных» множества — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Множества, равномощные множеству $\mathbb{N}$ (множеству натуральных чисел), называются *счётными.*

Множества, равномощные множеству $\mathbb{R}$ (множеству действительных чисел), называются *континуальными* .

Примером счётного множества является множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Построим биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Отобразим чётные числа в положительные по правилу $y = x/2$, а нечётные — в отрицательные и ноль по правилу $y = (1 - x)/2$. Данное отображение является биекцией. Следовательно, множество Z — счётно.

В заключение покажем, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ не являются равномощными.

Предположим, что это не так и существует биекция между элементами множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$. Пусть натуральному числу i соответствует при этой биекции действительное число α_i, которое представим в виде бесконечной десятичной дроби со знаком «+» или «$-$» перед самой дробью: $\alpha_i = a_{i0}, a_{i1}a_{i2}\ldots a_{it}\ldots$, где a_{i0} — целая часть числа α, а $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{it}, \ldots$ — цифры после запятой. При этом для определённости предоставления запретим использование фрагмента (9) — «девять в периоде». Тогда биекция имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccl}
1 & \leftrightarrow & a_{10}, a_{11}a_{12}\ldots a_{1t}\ldots \\
2 & \leftrightarrow & a_{20}, a_{21}a_{22}\ldots a_{2t}\ldots \\
3 & \leftrightarrow & a_{30}, a_{31}a_{32}\ldots a_{3t}\ldots \\
\vdots & \vdots & \qquad\vdots \\
s & \leftrightarrow & a_{s0}, a_{s1}a_{s2}\ldots a_{st}\ldots \\
\vdots & \vdots & \qquad\vdots
\end{array}$$

Определим число $\widetilde{\alpha} = 0, a_1a_2a_3\ldots a_t\ldots$ следующим образом. Пусть

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{ii} \neq 1; \\ 2, \text{ если } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Построенное число α не совпадает ни с одним числом из перечисленных выше (поскольку отличается от i-го числа в i-м знако после запятой). Следовательно, числу α из $\mathbb{R}$ не соответствует никакое натуральное число. Противоречие с тем, что рассмотренное отображением между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — биекция. А значит, эти множества не являются равномощными.