1 Метод математической индукции

Для начала давайте посмотрим на значение слова «индукция». (Допишу позже, когда студенты что-то пришлют. Что-то про латинское ducere — вести)

Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнём первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.

Другое образное представление можно описать следующим образом. Пусть мы умеем подходить к основанию лестницы (база индукции), а также умеем подниматься на одну ступеньку (индуктивный переход). Тогда мы можем подняться на любую ступеньку лестницы.

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения, зависящего от натурального параметра (номера). Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — база (базис) индукции, а затем доказывается, что если верно утверждение с номером n, то верно и следующее утверждение с номером $n+1$ — шаг индукции, или индукционный переход.

Сформулируем принцип математической индукции более формально (более точно и строго). Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$.

Для этого достаточно сначала установить истинность утверждения P_1 (проверить базу индукции), а затем доказать, что для любого номера n если справедливы утверждения $P_1, P_2, \dots, P_n$, то будет верным и утверждение P_{n+1} (переход индукции). Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

1.1 Примеры решения задач методом математической индукции (по индукции).

Пример 1. Сколько раз надо разломить шоколадку, чтобы получить n кусочков? Шоколадка не крошится, а за один разлом делится на две, не обязательно равные, части.

Непосредственно из условия задачи следует, что за после одного разлома мы получим две части шоколадки. Разломив один из получившихся кусков на две части, мы получим три куска шоколадки.

Покажем теперь, что n кусочков мы получим за $n-1$ разлом. Предположим, что для числа кусочков меньше, чем n, наше предположение выполняется, то есть для любого $k < n$ выполняется условие: k кусочков шоколадки можем получить за $k-1$ разлом. Тогда для получения $n-1$ кусочка нужно $(n-1)-1 = n-2$ разлома. Разломив один из этих кусочков на две части, мы используем $(n-1)-1+1 = n-1$ разлом и получим n кусочков шоколадки.

Возможно, это рассуждение может показаться чересчур детальным и даже ненужным. Зачастую такие рассуждения скрываются за фразой «и так далее». Вспомним, например, как определялась арифметическая прогрессия и как выводилась формула для n-го члена арифметической прогрессии.

Последовательность, в которой два соседних члена различаются на одно и то же число, называется арифметической прогрессией, то есть $a_n - a_{n-1} = d$. Чтобы найти формулу для n-го члена арифметической прогрессии, обычно пишут так:

$$\begin{gathered} a_2 = a_1 + d; \\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d; \\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d; \\ \dots \\ a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d. \end{gathered}$$

Посмотрим, что же скрывается за многоточием. Формулу для нескольких первых членов можно проверить непосредственно. А дальше мы считаем, что предполагаемая формула уже работает для всех предыдущих членов последовательности, то есть для всех тех, у которых номер меньше n, и опираясь на это, получаем формулу для n-го члена арифметической прогрессии. Мы как бы подразумеваем, что далее делаем необходимое количество однотипных шагов, которые приводят нас к ответу для n.

Пример 2. Докажите, что число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех целых неотрицательных n.

База индукции. Проверим утверждение для $n = 0, 1$:

$$\begin{gathered} 5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16; \\ 5^1 - 4 \cdot 1 + 15 = 16. \end{gathered}$$

Индуктивный переход. Предположим, что для всех $k = n-1$ равенство выполняется. Покажем, что равенство верно для $k = n$.

$$\begin{aligned} 5^n - 4n + 15 = 5 \cdot 5^{n-1} - 20n + 20 + 75 + 20n - 20 - 75 - 4n + 15 = \\ = 5 \cdot (5^{n-1} - 4(n-1) + 15) + 16(n-5) \end{aligned}$$

По предположению индукции первое слагаемое делится на 16. Поскольку второе слагаемое также делится на 16, то и выражение делится на 16 при $k = n$. Следовательно, число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех целых неотрицательных n.

Пример 3. Доказать, что, имея гирьки весом 3 г и 5 г (в неограниченном количестве), можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой n г, где n — натуральное число, превосходящее 7.

Разобьём веса на тройки вида $3m - 1$, $3m$ и $3m + 1$, где m — натуральное число, превосходящее 2. Нетрудно видеть, что любое натуральное число больше 7 попадает в одну из этих троек. Индукцию будем вести по m

База индукции. Проверим утверждение для $m = 3$. Если вес груза 8 г, то используется по одной гирьке 3 г и 5 г, если вес груза 9 г, то используются 3 гирьки по 3 г, если вес груза 10 г, то используется две гирьки по 5 г.

Индуктивный переход. Предоположим, что для $k = m - 1$ утверждение доказано. Покажем тогда, что используя заданные гирьки, можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой $3m - 1$, или $3m$, или $3m + 1$. По предположению индукции, используя гирьки весом 3 г и 5 г, можно уравновесить весы, на одной чаше готорых находится груз массой $3(m-1)-1$, или $3(m-1)$, или $3(m-1)+1$. Добавляя к гирькам ещё одну гирьку весом 3 г, мы можем уравновесить весы с грузом весом $3m-1$, или $3m$, или $3m+1$ соответственно. Следовательно, можно уравновесить весы с грузом массы n, где n — любое натуральное число, превосходящее 7.

Пример 4. Доказать, что если $x+\frac{1}{x}$ — целое число, то и $x^n+\frac{1}{x^n}$ целое число

База индукции. Для $n=1$ справедливость утверждения следует из условия. Проверим для $n=2$:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

Первое число целое, так как является квадратом целого числа. А значит, и $x^2+\frac{1}{x^2}$ — целое, так как является разностью двух целых чисел.

Индуктивный переход. Предположим, что для всех $k<n$ утверждение верно. Покажем, что оно также справедливо для $k=n$. Чтобы получить степень n, нам, скорее всего, потребуется перемножить какое-то выражение, содержащее x в степени $n-1$ и на выражение, содержащее x первой степени. Попробуем самый простой вариант:

$$\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^n+x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}.$$

Таким образом получаем

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

По предположению индукции справа разность произведения целых чисел и целого числа. А значит, слева также целое число. Следовательно, утверждение также справедливо для $k=n$.

Обратим внимание на то, что в этой задаче для доказательства утверждения для n-го шага используется не только предыдущий шаг, но и $n-2$ шаг. В более общем случае мы можем использовать любое утверждение, в котором $k<n$.

Пример 5. Доказать, что число $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ является полным квадратом для любого натурального n.

Доказать требуемый факт «в лоб», в том числе и по индукции, — задача, к которой даже непонятно как подтупаться. Для того, чтобы решить задачу, формально усложним себе жизнь, усилив доказываемое утверждение до следующего: доказать для любого натурального n равенство

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

В такой постановке утверждение уже несложно доказывается по индукции (здесь, правда, за кадром остается вопрос о том, как догадаться до доказываемого равенства).

База индукции. Проверим утверждение для $n=1,2$:

$$1^3=1^2;$$
$$1^3+2^3=9=3^2=(1+2)^2.$$

Отметим, что в правой части равенства находится квадрат суммы арифметической прогрессии. Поэтому исходное равенство можно переписать в виде

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Индуктивный переход. Предоположим, что для $k = n$ утверждение выполняется. Проверим справедливость утверждения для $k = n + 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \text{ (по предположению индукции)}$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) =$$
$$(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Следовательно, утверждение выполняется для $k = n + 1$. А значит, утверждение выполняется для всех натуральных n.

1.2 Примеры ошибок в доказательстве по индукции.

Пример 6. У любых n людей глаза одинакового цвета.

Индукция по n (числу людей). Для $n = 1$ утверждение, очевидно, верно (хотя и бессодержательно). Остаётся перейти от n к $n + 1$. Пусть установлено, что у любых n людей глаза одинакового цвета. Покажем, что тогда у любых $n + 1$ людей глаза одинакового цвета. Действительно, если рассмотреть всех людей, кроме последнего, то по предположению индукции у них у всех глаза одинакового цвета. Теперь рассмотрим всех людей, кроме первого. У них по предположению индукции все глаза одинакового цвета (естественно, того же самого цвета). Поэтому у всех $n+1$ людей глаза одинакового цвета. Утверждение доказано по индукции

Пример 7. Насыпать кучу из манки (манной крупы) невозможно.

Индукция по числу крупинок n. База индукции: одна крупинка, конечно, не является кучей. Пусть теперь насыпано n крупинок, и насыпанное не является кучей. Тогда добавление одной маленькой крупинки манки, безусловно, не превратит высыпанное в кучу.

Пример 8. Если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то из любого города можно попасть в любой другой город страны.

Индукция по числу городов. База, $n = 2$ (страна из двух городов), очевидна. Проведем индукционный переход. Возьмем произвольную страну с n городами и добавим к ней новый город, из которого выходит хотя бы одна дорога. Эта дорога ведет в один из старых городов. По предположению индукции из любого старого города можно попасть в любой другой старый город. Следовательно, из нового города можно попасть в любой старый город (и наоборот). Значит, из любого города можно попасть в любой другой город. Утверждение доказано по индукции.