Школа лингвистики, 2022-23 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Лекция 10. Правило Крамера. Обратная матрица. (22.11.2022)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов,Р. Я. Будылин

Эта лекция является продолжением предыдущей и поэтому здесь продолжена нумерация.

4 Обратная матрица

Последняя операция, которую мы ещё не обсудили для матриц, — это деление. Эта операция будет определена только для квадратных матриц, то есть матриц размера $n \times n$. Как мы обсуждали на прошлой лекции, умножение матриц — операция некоммутативная, то есть нельзя просто так переставить матрицы местами. Поэтому для деления тоже будет как бы «левое» деление и «правое» деление. Такие названия немного сбивают с толку и поэтому вместо деления матриц используют другую терминологию. Вспомним, что для обычных чисел деление, скажем, на 2 это то же самое, что и умножение на $\frac{1}{2}$. А само по себе число $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ — число обратное к двойке. То есть деление это умножение на *обратное* число. Значит нам нужно всего лишь научиться находить *обратную матрицу*, а дальше мы сможем умножать на обратную матрицу слева или умножать на обратную матрицу справа. Но что же такое обратная матрица? Для чисел обратное число это такое, что в произведении с исходным получается единица: $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. Значит нам нужно решить, что же является единичной матрицей (обозначается E) среди матриц размера $n \times n$.

Определение 1. *Единичной* называют матрицу у которой на диагонали стоят единицы, а все остальные элементы - нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix}$$

В таком случае обратной матрицей к матрице A мы будем называть матрицу (обозначается A^{-1}), которая при умножении на исходную даёт единичную матрицу. Оказывается, неважно, какое в этом определении выбрать умножение: если в одном порядке получается единичная, то и в другом тоже.

Определение 2. Матрица A^{-1} — *обратная матрица* к A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Как же найти обратную матрицу? Конечно, можно было бы записать ее с неизвестными коэффициентами, подставить в уравнение выше и решить его. Получится линейная система (о, удачно мы научились выше решать линейные системы методом Крамера!) уравнений. Одна проблема: переменных и уравнений в ней будет n^2, то есть даже для матрицы 2×2 будет система из 4 уравнений с 4 неизвестными. Конечно, такую систему можно решить (в том числе методом Крамера), но это будет очень долго. Однако оказывается, что для обратной матрицы можно сразу выписать явную формулу, хоть она и будет не очень простой.

Для начала введём ещё одно определение (на самом деле мы уже знакомы с этим объектом, просто так его не называли).

Определение 3. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется следующее число:

$$A_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\substack{\text{Это знак из}\\ \text{правила знаков}}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Это определитель матрицы}\\ \text{получаемой из исходной}\\ \text{вычеркиванием}\\ i\text{–й строки и } j\text{–го столбца}}}$$

С помощью понятия алгебраического дополнения можно написать явную формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} & & \\ & A_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}^T$$

В правой части этой формулы стоит матрица, составленная из алгебраических дополнений. То есть вместо каждого элемента исходной матрицы мы ставим его алгебраическое дополнение. Рассмотрим поиск обратной матрицы на примере:

Пример 1. Вычислим обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

Для начала нам необходимо вычислить определитель. У данной матрицы первый столбец содержит два нуля и поэтому удобнее всего раскладывать определить именно по нему:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6 - (-4)) - 0 + 0 = -2$$

Теперь записываем формулу для обратной матрицы. Сначала в матрице из алгебраических дополнений мы ставим знаки из правила знаков, а затем дописываем везде нужные определители:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Осталось ответить всего на один вопрос: у всякой ли матрицы существует обратная? Ответ легко увидеть из формулы — единственная операция, которая может не получиться, это деление на определитель. Таким образом, обратной матрицы нет только если у исходной матрицы определитель равен нулю. Для всех остальных матриц (с ненулевым определителем) обратная существует.