

Школа лингвистики, 2022-23 уч. год

Дискретная математика

Лекция 3, 4 (12 сентября 2022 г)

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович

## 1 Определения и простейшие свойства основных комбинаторных объектов

С чего начинается комбинаторика? В каком-то смысле она начинается с ответа на вопрос: сколькими способами можно среди  $n$  элементов выбрать  $k$  элементов? На самом деле это не один вопрос, а четыре — выборка может быть упорядоченной и неупорядоченной, повторный выбор одного и того же элемента может допускаться, а может не допускаться. Упорядоченные выборки называются *размещениями* или *наборами*, а неупорядоченные — *сочетаниями*. Как правило, по умолчанию под выборкой понимается выборка без повторений, а если речь идет о выборке с повторениями, то это оговаривается явным образом.

### 1.1 Общие соображения

Если множество  $A$  содержит  $n$  элементов (то есть выбрать один элемент из множества  $A$  можно  $n$  способами), а множество  $B$  —  $m$  элементов (то есть выбрать один элемент из множества  $B$  можно  $m$  способами), и нужно выбрать один элемент из множества  $A$  и один элемент из множества  $B$ , то такой выбор можно осуществить  $n \cdot m$  способами.

**Пример 1.** В группе 6 юношей и 15 девушек, нужно выбрать пару «юноша и девушка» среди присутствующих. Это можно сделать  $6 \cdot 15 = 90$  способами.

**Пример 2.** В столовой имеется чай, кофе, компот, вода и 7 видов выпечки. Студентка собирается перекусить каким-нибудь напитком с булочкой. Она может выбрать перекус  $4 \cdot 7 = 28$  способами.

**Замечание.** В советах «как все время одеваться по-разному при небольшом гардеробе» это правило используется постоянно (и каждый раз выдается за необыкновенное открытие). Например, если у девушки имеется 3 пары брюк, 2 юбки и 4 кофточки, то у неё имеется  $(3 + 2) \cdot 4 = 20$  вариантов комплектов. А если к этому добавить пару жакетов, то число вариантов утраивается (можно пойти в одном из жакетов или без него).

*Факториалом* натурального числа  $n$  называется произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$ . Обозначается  $n!$ . Для удобства считается, что  $0! = 1$ .

Можно определить факториал числа по индукции.

1.  $0! = 1$ .

2.  $n! = n \cdot (n - 1)!$ .

Итак, пусть есть  $n$ -элементное множество, например,  $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Дадим ответ на вопрос о числе выборок  $k$  элементов из этого множества.

## 1.2 Упорядоченные выборки с повторениями (размещения с повторениями).

**Пример 3.** Пусть у нас имеются 20 различных карандашей и 7 ящиков (различных). Сколькими способами можно разложить карандаши по ящикам? Первый карандаш можно положить в любой из семи ящиков, второй — тоже в любой из семи ящиков. И так каждый карандаш можно положить в любой из семи ящиков. Таким образом получаем, что всего имеется

$$\underbrace{7 \cdot \dots \cdot 7}_{20 \text{ раз}} = 7^{20} = 79\,792\,266\,297\,612\,001 \approx 8 \cdot 10^{16}$$

способов разместить 20 карандашей по 7 ящикам.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется  $n$  различных предметов и  $k$  ящиков. Тогда каждый предмет можно положить в любой из  $k$  ящиков. Следовательно, получаем, что всего имеется

$$\underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_n = k^n$$

способов разместить  $n$  предметов по  $k$  ящикам.

**Пример 4.** Аналогичным образом можно посчитать, сколько существует способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов. Действительно, поскольку каждый предмет можно раскрасить в любой из  $k$  цветов, то всего существует

$$\underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{15 \text{ раз}} = 10^{15}$$

способов раскрасить 15 различных предметов в 10 цветов.

**Пример 5.** Пусть у нас имеется 15 различных деревянных игрушек. Сколькими способами можем их раскрасить в 5 цветов (каждую игрушку красим ровно в один цвет)?

Первую игрушку можем покрасить в один из 5 цветов, вторую — тоже в один из пяти цветов, и так каждую из 15 игрушек можем покрасить в один из 5 цветов. Всего получаем

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{15} = 5^{15} = 30\,517\,578\,125 \approx 3 \cdot 10^{10}.$$

Таким образом, число упорядоченных выборок с повторениями равно числу  $k$ -значных чисел в системе счисления по основанию  $n$ , т. е. равно

$$n^k.$$

### 1.3 Упорядоченные выборки без повторений (размещения).

**Пример 6.** Пусть у нас имеется 10 различных новогодних подарков и 15 различных подарочных пакетов. Любой подарок можно положить в любой пакет. Сколько существует способов упаковать подарки? Как и в предыдущих задачах, первый подарок можно положить в любой из 15 пакетов. Для второго подарка останется на выбор 14 пакетов. Для третьего — 13, для последнего — 6. Таким образом, существует  $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 = 10\,897\,286\,400 \approx 10^{10}$  способов упаковать подарки. Используя обозначение факториала, это значение можно записать следующим образом.

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{15!}{5!}.$$

Аналогичное соотношение получим для  $n$  подарков и  $k$  пакетиков. Первый подарок можно упаковать в любой из  $k$  пакетов, второй — в любой из оставшихся  $k - 1$  пакетов, третий — в один из оставшихся  $k - 2$  пакетов, ..., последний — в любой из оставшихся  $k - n + 1$  пакетов. Поэтому всего будет

$$\begin{aligned} k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot (k - n + 1) &= \\ &= \frac{k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot (k - n + 1) \cdot (k - n) \cdot (k - n - 1) \cdot \dots \cdot 1}{(k - n) \cdot (k - n - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{k!}{(k - n)!} \end{aligned}$$

способов упаковать подарки.

**Пример 7.** В гостинице 15 одноместных номеров. Сколько способов существует расселить 5 постояльцев по этим номерам (каждый постоялец собирается жить в отдельном одноместном номере). Первого постояльца можно поселить в одну из 15 комнат, второго — в одну из 14, третьего — в одну из 13, четвертого — в одну из 12, пятого — в одну из 11. Поэтому всего существует  $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$  способов расселить 5 постояльцев в 15 одноместных номеров.

**Пример 8.** Сколько существует последовательностей из 0 и 1 длины  $n$ , содержащих  $k$  нулей и  $n - k$  единиц?

#### Перестановки.

**Пример 9.** На карточках написаны числа от 1 до 7. Посмотрим, сколькими способами можно выложить эти карточки в ряд. На первое место можно поместить одну из семи карточек. На второе — одну из шести, ..., на предпоследнее — одну из двух, на последнее — одну оставшуюся карточку. Таким образом, всего существует  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$  способов выложить 7 карточек в ряд.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется  $n$  различных предметов. Сколькими способами можно их упорядочить (пронумеровать)? На первое место можно поместить любой из  $n$  предметов, на второе — любой из оставшихся  $n - 1$  предметов, ..., на  $k$ -е место можно поместить любой из оставшихся  $n - k + 1$  предметов, ..., на последнее — один оставшийся предмет. А значит, всего существует  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  способов упорядочить  $n$  различных предметов.

**Пример 10.** Занятие у вас закончилось чуть раньше и никого больше в столовой нет (8 юношей, 14 девушек). Сколькими способами вы можете выстроиться в очередь? В соответствии с рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}$$

способов.

**Пример 11.** А если на первое место пропустим одну из девушек? Тогда первый человек может быть выбран 14 способами, второй — 21 способом, третий — 20 способами, . . . , предпоследним может быть один из двух, а в конец встает оставшийся. Получаем

$$14 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 14 \cdot 21! \approx 7 \cdot 10^{20}.$$

## 1.4 Неупорядоченные выборки без повторений (сочетания).

**Пример 12.** На полке стоит 15 различных книжек, а в сумку помещаются только 3. Сколькими способами можно взять 3 книжки с полки (в сумку)?

Предположим сначала, что расположение (порядок) книжек в сумке важен. Тогда первую книжку мы можем взять одну из 15, вторую — одну из 14, третью — одну из оставшихся 13. То есть всего  $15 \cdot 14 \cdot 13$  способов. Пусть мы взяли книжки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Если они у нас лежат в сумке «кучей», то упорядочить мы их можем  $3! = 6$  способами. Значит, каждому беспорядочному набору из 3 книжек соответствует 6 упорядоченных наборов. Важно отметить, что разным неупорядоченным наборам соответствуют разные упорядоченные наборы. Число упорядоченных наборов мы знаем, поэтому получаем, что число «кучек» равно

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Обобщим эту задачу. Пусть у нас имеется  $n$  предметов, нам нужно выбрать  $k$  из них. Если бы был важен порядок предметов (например, книги на полке), то было бы  $\frac{n!}{(n-k)!}$  способов сделать выбор. Поскольку  $k$  предметов можно упорядочить  $k!$  способами, то каждой неупорядоченной выборке из  $k$  предметов соответствует  $k!$  упорядоченных наборов. А значит, существует  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  способов выбрать  $k$  элементов из  $n$ .

Другими словами, одной неупорядоченной выборке  $k$  элементов без повторений соответствует  $k!$  упорядоченных выборок без повторений, то число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов, обозначаемое  $C_n^k$ , при  $n \geq k \geq 0$  равно

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

## 1.5 Неупорядоченные выборки с повторениями (сочетания с повторениями).

**Пример 13.** Преподаватель берёт перед занятиями 10 маркеров. Они могут быть красными, синими, черными и зелеными. Сколько способов взять набор из 10 маркеров существует? Все маркеры одного цвета одинаковые.

Давайте возьмем 10 маркеров и разложим по 4 «ящикам с краской». У нас получится примерно следующее:

$$\underbrace{|\text{ooo}|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{oo}|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{ooo}|}_{\text{з}}$$

или так:

$$\underbrace{|\text{ooooo}|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{oooo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{o}|}_{\text{з}}$$

или даже так (все-таки черный цвет маркера на лекции предпочтителен):

$$\underbrace{|\text{ }|}_{\text{к}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{с}} \underbrace{|\text{ooooooooo}|}_{\text{ч}} \underbrace{|\text{ }|}_{\text{з}}$$

В любом случае у нас имеется 10 маркеров и 3 «разделителя по цветам» (крайние вертикальные палочки положения не меняют), которые мы и располагаем на 13 последовательных местах. А значит, нам надо выбрать из 13 мест 3 для «разделителей», а остальные заполнить «маркерами-кружочками» единственным способом. Сделать это можно  $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$  способами.

Обобщим этот пример. Пусть у нас имеется  $n$  предметов которые мы хотим разложить по  $k$  ящикам (или, что то же самое, раскрасить в  $k$  цветов). Тогда опять же, нам  $n$  предметов и  $k - 1$  разделитель надо упорядочить на  $n + k - 1$  месте. Выбрать места для «разделителей» можно  $C_{n+k-1}^{k-1}$  способами. На остальные  $n$  мест  $n$  одинаковых предметов размещаются единственным образом. Следовательно, существует  $C_{n+k-1}^{k-1}$  способов разложить  $n$  предметов по  $k$  ящикам.

Если говорить о выборке, то получается, что на каждом шаге мы выбираем «ящик» («цвет»), которые могут повторяться, и для которых не важен порядок выбора.

Между множеством всех сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элементов и множеством всех двоичных наборов длины  $n + k - 1$  с  $k$  нулями следующим образом можно установить взаимно однозначное соответствие: выборке, в которой  $k_1$  единиц,  $k_2$  двоек,  $\dots$ ,  $k_n$  чисел  $n$ ,  $k_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $k_1 + \dots + k_n = k$ , соответствует набор, в котором сначала расположены  $k_1$  нулей, а затем последовательно для  $i = 2, \dots, n$  расположены наборы, состоящие из единицы и стоящих вслед за ней  $k_i$  нулей:

$$\underbrace{0 \dots 0}_{k_1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k_2} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k_n}.$$

Таким образом, число искомых выборок равно числу  $C_{n+k-1}^k$  сочетаний из  $n+k-1$  элементов по  $k$  элементов, т. е. числу

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Обобщим имеющиеся результаты. Пусть у нас есть выборка  $k$  предметов из  $n$ . Тогда число способов считается следующим образом, в зависимости от того, упорядоченная ли выборка и есть ли повторения.

	с повторениями	без повторений
упорядоченные	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

## 1.6 Ещё примеры

**Пример 14.** Молодые люди решили пропустить всех девушек вперед (см. пример 10). Тогда очередь распадается на две части. Сначала упорядочиваем всех девушек  $14!$  способами, а потом всех юношей  $8!$  способами. Используя правило произведения получаем, что выстроиться существует

$$14! \cdot 8! = 87\,178\,291\,200 \cdot 40\,320 = 3\,515\,028\,701\,000\,000 \approx 3.5 \cdot 10^{15}$$

способов выстроиться в очередь таким образом.

**Пример 15.** Посчитаем теперь способы поставить нашу группу из 22 человек другим способом. Теперь будем выбирать не следующего человека, которого ставим в очередь, а место в очереди для следующего человека, а люди пусть у нас как-то уже занумерованы. Первого человека можем поставить к кассе и все. Второго — либо перед первым, либо после. Третьего — к кассе, между двумя предыдущими или в конец. При этом каждый следующий человек делит «свой кусочек очереди» на две части. Поэтому  $k$ -го человека можно поставить на  $k$  мест. Следовательно, и при таком способе подсчета вариантов имеем  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ .

**Пример 16.** Пусть в столовой открылась вторая и третья кассы. Теперь первого человека можем поставить в одну из 3 касс — три способа. Второго — либо в одну из двух пустых касс, либо в кассу, где стоит первый, причем двумя способами: до или после него. Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2} = \\ &= \frac{24!}{2!} = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000 \approx 6 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$

способов поставить 22 человека в 3 кассы.

Обобщим этот пример. Теперь мы хотим поставить  $n$  человек в  $k$  касс. Первого человека можем поставить в любую из  $k$  касс. Также как и в предыдущих случаях, Также как и в предыдущем примере, каждый человек делит «свой кусочек очереди» на две части. А значит, для каждого следующего человека существует на один вариант постановки больше, чем для предыдущего. В результате получаем, что существует

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1) &= \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)k(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \end{aligned}$$

способов поставить  $n$  человек в  $k$  очередей.

**Пример 17.** Посчитаем, сколькими способами можно расставить 7 книг на 3 полках. В данном случае нам порядок важен, поэтому задача похожа на расстановку людей в очереди. В таком случае получаем

$$3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 = \frac{9!}{2} = 181\,440$$

способов расставить 7 книг на 3 полках.

Обобщая, получим следующую формулу для упорядоченных выборок без повторов. Первый элемент можно выбрать  $n$  способами, второй элемент —  $n-1$  способами, ...,  $k$ -й элемент —  $n-k+1$  способами. Таким образом общее число способов выбора равно

$$n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

## 1.7 Свойства биномиальных коэффициентов

### 1.7.1 Свойства сочетаний без повторов

1. Если  $k > n$  или  $k < 0$ , то  $C_n^k = 0$ .
2.  $C_n^0 = C_n^n = 1$ .
3. Для любого целого  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , справедливо равенство  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .
4. Функция  $f(k) = C_n^k$  целочисленной переменной  $k$  возрастает на множестве  $\{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$  и убывает на множестве  $\{\lceil n/2 \rceil, \dots, n\}$ .
5. Выполняется равенство

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

6. Для любого ненулевого  $x$  и произвольного целого неотрицательного  $n$  справедливо равенство (бином Ньютона):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

7. Верны равенства

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ 0, & \text{если } n \geq 1, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t \quad (n \geq 1, t \geq 0).$$

8. Треугольник Паскаля.

Запишем биномиальные коэффициенты по строкам, так, что в  $i$ -ой строке (нумерация идёт с нуля) будем записывать коэффициенты с нижним индексом  $i$ , а верхние будут идти в порядке возрастания от 0 до  $i$ .

								$C_0^0$											
								$C_1^0$	$C_1^1$										
							$C_2^0$	$C_2^1$	$C_2^2$										
						$C_3^0$	$C_3^1$	$C_3^2$	$C_3^3$										
			$C_4^0$	$C_4^1$	$C_4^2$	$C_4^3$	$C_4^4$												
		$C_5^0$	$C_5^1$	$C_5^2$	$C_5^3$	$C_5^4$	$C_5^5$												
	$C_6^0$	$C_6^1$	$C_6^2$	$C_6^3$	$C_6^4$	$C_6^5$	$C_6^6$												
$C_7^0$	$C_7^1$	$C_7^2$	$C_7^3$	$C_7^4$	$C_7^5$	$C_7^6$	$C_7^7$												
$C_8^0$	$C_8^1$	$C_8^2$	$C_8^3$	$C_8^4$	$C_8^5$	$C_8^6$	$C_8^7$	$C_8^8$											
$C_9^0$	$C_9^1$	$C_9^2$	$C_9^3$	$C_9^4$	$C_9^5$	$C_9^6$	$C_9^7$	$C_9^8$	$C_9^9$										
$\vdots$																			

Если запишем численные значения, то получим

								1											
								1	1										
							1	2	1										
						1	3	3	1										
				1	4	6	4	1											
			1	5	10	10	5	1											
		1	6	15	20	15	6	1											
	1	7	21	28	35	21	7	1											
	1	8	28	36	56	35	28	8	1										
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1										
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1									
$\vdots$																			

## 1.7.2 Свойства сочетаний с повторениям.

1. Число неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = k$$

равно числу сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элементов, т. е. равно  $C_{n+k-1}^k$ .

2. Число монотонных отображений<sup>1)</sup> из множества  $\{1, 2, \dots, k\}$  в множество  $\{1, 2, \dots, n\}$  равно числу сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элементов, т. е. равно  $C_{n+k-1}^k$ .

▷ Между множеством из всех  $C_{n+k-1}^k$  двоичных наборов длины  $n+k-1$  с  $k$  единицами и множеством монотонных отображений из множества  $\{1, 2, \dots, k\}$  в множество  $\{1, 2, \dots, n\}$  следующим образом установим взаимно однозначное соответствие. Пусть в наборе длины  $n+k-1$  с  $k$  единицами число нулей до первой единицы равно  $r_1$ , число нулей, расположенных между единицами с номерами  $i-1$  и  $i$ ,  $i = 2, \dots, k$ , равно  $r_i$ :

$$\underbrace{0 \dots 0}_{r_1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{r_2} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{r_k} 1 0 \dots 0.$$

Соответствующее этому набору монотонное отображение  $f$  из множества  $\{1, 2, \dots, k\}$  в множество  $\{1, 2, \dots, n\}$  задается таким образом:

$$f(s) = 1 + \sum_{i=1}^s r_i, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Легко понять, что и по монотонному отображению исходный набор восстанавливается однозначно.  $\square$

3. Для любого натурального  $n$  при  $0 < |x| < 1$  справедливо равенство

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

▷ Установим коэффициент при слагаемом  $x^k$  после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots) \dots (1+x+x^2+\dots)}_{n \text{ раз}}.$$

Если какое-либо выражение в скобках не дает «вклад» в конкретное слагаемое  $x^k$ , то считаем, что это выражение не входит в выборку, а если дает вклад  $x^s$ ,  $1 \leq s \leq k$ , то — входит с кратностью  $s$ . Тогда коэффициент при  $x^k$  совпадает с числом сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элементов.  $\square$

<sup>1)</sup> Отображение  $f$  называется *монотонным*, если для любых  $a$  и  $b$  из области определения отображения  $f$  из неравенства  $a \leq b$  следует неравенство  $f(a) \leq f(b)$ .

Теперь преобразуем выражение из свойства 3 сочетаний с повторениями следующим образом:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!} x^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-x)^k.\end{aligned}$$

Таким образом, формулы из свойства 5 сочетаний и из свойства 3 сочетаний с повторениями являются частными случаями известного из курса математического анализа и справедливого для любого действительного  $\alpha$  при  $0 < |x| < 1$  разложения

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что для всех целых неотрицательных  $n$  и  $k$  верно равенство

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

## 2 Формула включений-исключений

Для начала разберём задачу:

**Пример 18.** Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7.

Для решения этой задачи посчитаем все числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, а потом вычтем это количество из 1000. Для начала посчитаем, сколько положительных чисел, не превосходящих 1000, делится на 2, 3, 5 и 7 по отдельности:

$$N_2 = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500; \quad N_3 = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333; \quad N_5 = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200; \quad N_7 = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142.$$

Если мы будем считать сумму этих чисел, то некоторые числа (например, 6, 10, 14, 30) будут посчитаны несколько раз. Чтобы учесть это, посчитаем количество чисел, которые делятся на 2 числа:

$$\begin{aligned}N_{23} &= \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166; & N_{25} &= \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100; & N_{27} &= \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor = 71; \\ N_{35} &= \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66; & N_{37} &= \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47; & N_{57} &= \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28.\end{aligned}$$

А также на 3 числа:

$$N_{235} = \left[ \frac{1000}{30} \right] = 33; \quad N_{237} = \left[ \frac{1000}{42} \right] = 23; \quad N_{257} = \left[ \frac{1000}{70} \right] = 14; \quad N_{357} = \left[ \frac{1000}{105} \right] = 9.$$

Наконец, на все 2, 3, 5 и 7 будет делиться  $N_{2357} = \left[ \frac{1000}{210} \right] = 4$  числа.

Тогда чисел, которые делятся на 2, 3, 5 и 7 будет

$$(N_2 + N_3 + N_5 + N_7) - (N_{23} + N_{25} + N_{27} + N_{35} + N_{37} + N_{57}) + (N_{235} + N_{237} + N_{257} + N_{357}) - N_{2357} = (500 + 333 + 200 + 142) - (166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28) + (33 + 23 + 14 + 9) - 4 = 772.$$

Покажем, что в этой сумме учтено каждое число, которое делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, причём ровно по одному разу. Рассмотрим 4 случая:

1. Пусть некоторое число делится только на одно из чисел 2, 3, 5 или 7. Тогда оно будет учтено только один раз в первой скобке.
2. Пусть некоторое число делится ровно на два числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 3 и на 5 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в  $N_3$  и в  $N_5$  со знаком «+» и в  $N_{35}$  со знаком «-». А значит, всего оно будет учтено один раз.
3. Пусть некоторое число делится ровно на три числа из 2, 3, 5 или 7. Пусть, например, оно делится на 2, на 5 и на 7 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда это число мы посчитаем в  $N_2$ , в  $N_5$  и в  $N_7$  со знаком «+», в  $N_{25}$ ,  $N_{35}$  и  $N_{57}$  со знаком «-» и в  $N_{257}$  со знаком «+». Следовательно, это число будет учтено один раз.
4. Пусть некоторое число делится ровно на 2, 3, 5 и 7. Тогда это число учитывается в каждом слагаемом. В выражении 8 положительных и 7 отрицательных слагаемых, а значит, это число также будет учтено ровно один раз.

Таким образом, число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5 и 7, равно  $1000 - 772 = 228$ .

В примере 18 фактически использовалась формула включений-исключений. Рассмотрим её в общем виде.

Пусть есть  $N$  предметов и свойства  $p_1, \dots, p_n$ . Каждый предмет может одними свойствами обладать, а другими не обладать. Обозначим через  $N_{i_1, \dots, i_k}$  количество предметов, которые обладают свойствами  $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$  (обладание остальными свойствами — произвольное).

Через  $N(r)$  обозначим число предметов, обладающих ровно  $r$  свойствами. Положим

$$S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N_{i_1, \dots, i_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Здесь особо отметим, что  $S_k$  — просто удобные обозначения, способствующие уменьшению громоздкости выкладок, не стоит за ними усматривать какой-то сакраментальный смысл.

**Теорема 1.** *Справедливо равенство*

$$N(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k.$$

*Доказательство.* Покажем, что каждый предмет дает одинаковый вклад при подсчете левой и правой частей устанавливаемого равенства.

Пусть предмет не обладает ни одним свойством. Тогда вклад в левую часть будет равен 1, вклад в правую часть будет ненулевым только в слагаемое  $S_0 = N$ , соответствующее мощности множества всех предметов, и этот вклад тоже равен 1.

Пусть предмет обладает  $s$  свойствами,  $1 \leq s \leq n$ , и это свойства  $p_{j_1}, \dots, p_{j_s}$ . Тогда данный предмет дает ненулевой (единичный) вклад в слагаемое  $N_{i_1, \dots, i_t}$  тогда и только тогда, когда верно включение

$$\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}.$$

Вклад этого предмета в левую часть равен нулю, а в правую —

$$\sum_{t=1}^s (-1)^t C_s^t,$$

т. е. вклад тоже нулевой.

Суммируя по всем предметам доказанные равенства вкладов в левую и правую часть, получаем справедливость исходного равенства.  $\square$

Переформулируем формулу включений-исключений в терминах множеств.

**Следствие 1.** *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}|. \end{aligned}$$

**Пример 19** (задача о беспорядках). Найти точное значение числа подстановок  $\sigma$  симметрической группы  $S_n$ , удовлетворяющих условию  $\sigma(i) \neq i$  для всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Что произойдет, если сумму из правой части формулы включений-исключений оборвать на каком-либо слагаемом? Оказывается, что если последнее выписанное слагаемое положительное (точнее, оно соответствует четному числу свойств), то получается оценка величины  $N(0)$  сверху, а в противном случае — снизу.

**Теорема 2** (Неравенства Бонферрони). Для любого  $l$ ,  $0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k \leq N(0) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k.$$

*Доказательство.* Для каждого из неравенств подобно доказательству формулы включений-исключений достаточно установить соответствующее неравенство для вкладов в левую и правую часть доказываемого соотношения каждого из предметов. Нужное неравенство легко следует из равенства

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k C_n^k = (-1)^t C_{n-1}^t$$

(третье равенство свойства 6 сочетаний). □

Также аналогично формуле включений-исключений можно установить справедливость следующих утверждений.

**Теорема 3.** *Справедливы равенства*

$$N(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k,$$

$$N_{\geq r} = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k,$$

где  $N_{\geq r}$  — количество предметов, обладающих не менее чем  $r$  свойствами.

**Пример 20.** Доказать теорему 3.

Обозначим через  $\varphi(m)$  функцию Эйлера, численно равную количеству натуральных чисел, не превосходящих  $m$  и взаимно простых с  $m$ .

**Теорема 4.** Пусть  $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$  — разложение числа  $m$  на простые множители. Тогда

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

*Доказательство.* Применим формулу включений-исключений, положив  $N = m$  и считая  $i$ -м свойством делимость на  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(m) = N(0) = m - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{m}{p_i} + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{m}{p_1 \dots p_n} = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \end{aligned}$$

□