Департамент политической науки, 2021-22 уч. год
Высшая математика
Лекция 4. Правило Крамера. Обратная матрица. (23.09.2021)

И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

Эта лекция является продолжением предыдущей и поэтому здесь продолжена нумерация.

3 Определитель матрицы

Сам по себе определитель матрицы будет нужен нам для определения обратной матрицы. Кроме того, определитель имеет множество различных применений и ниже мы рассмотрим один из примеров.

3.2 Правило Крамера

Очень часто в приложениях встречаются системы линейных уравнений, то есть уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Из школы известно (да и вообще здравый смысл подсказывает), что для того, чтобы решение у системы было и было единственное, нужно чтобы количество переменных и количество неизвестных было одинаковым (то есть $k = n$). На самом деле все несколько сложнее и, например, даже в этом случае может оказаться, что у системы все же нет решений или решений бесконечно много, но мы не будем углубляться в эти детали. В школе учат решать такие системы выражая сначала одну переменную через все остальные, а потом постепенно все сводя к одному уравнению с одной неизвестной. Это правильный, однако довольно длинный и трудоёмкий подход. Оказывается, что если воспользоваться матричной формой записи системы, то ответ можно выписать сразу с использованием определителя. Далее мы будем работать только с системами где $k = n$.

Систему 1 можно переписать в матричном виде. Если обозначить:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

то удивительным образом матричное умножение матрица A на столбец (то есть фактически матрицу из одного столбца) x дают в результате столбец из левых частей уравнений в системе 1:

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{a_{11}} & \dots & \color{blue}{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{blue}{a_{n1}} & \dots & \color{blue}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{x_1} \\ \vdots \\ \color{red}{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{blue}{a_{11}}\color{red}{x_1} + \dots + \color{blue}{a_{1n}}\color{red}{x_n} \\ \vdots \\ \color{blue}{a_{n1}}\color{red}{x_1} + \dots + \color{blue}{a_{nn}}\color{red}{x_n} \end{pmatrix}$$

Приравнивая полученную матрицу (из одного столбца) к столбцу, содержащему значения из правых частей системы 1, получаем очень короткую, *матричную* форму записи:

$$Ax = b$$

Матрица A называется *матрицей системы*, а столбец b — *столбцом правых частей*.

Правилом Крамера называется метод решения, когда сразу можно выписать ответ через определители матриц, составленных из коэффициентов системы. Рассмотрим применение метода Крамера на примере (вместо x_1 и x_2 будем в примере использовать привычные x и y).

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Для решения уравнения сперва необходимо вычислить определитель матрицы системы. Его обозначают греческой буковой "дельта":

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$$

Если этот определитель оказался ненулевым (что делать когда он равен нулю, мы обсудим позже), у системы точно имеется единственное решение. Далее вычисляются два вспомогательных определителя по следующему правилу. Для каждой переменной берётся соответствующий ей столбец из матрицы системы (напомним, матрица системы это просто коэффициенты из уравнений) и заменяется на столбец правой части. У полученной матрицы считается определитель.

Для переменной x необходимо заменить столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и тогда соответствующий определитель будет

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

Для переменной y необходимо заменить столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ и тогда соответствующий определитель будет

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6$$

После этого можно сразу выписать ответ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{3}{-3} = -1 \\ \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2 \end{cases}$$

Описанный выше пример иллюстрирует общую формулу: $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$. Но что делать, если определитель матрицы системы оказался равен нулю? Оказывается в этом случае есть два варианта:

1. Если хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i} \neq 0$, то на самом деле они все ненулевые и решения у этой системы нет.

2. Если хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i} = 0$, то на самом деле они все нулевые. В случае, если у нас система из 2 уравнений и 2 неизвестных, то решений у этой системы бесконечно много, а вот в случае системы большего порядка необходимо дополнительное исследование.

На практике методом Крамера удобно пользоваться для систем из 2 уравнений и 2 неизвестных, однако при некоторой оптимизации вычислений определителей, метод оказывается достаточно быстрым для систем любого размера. Полученные явные формулы для систем уравнений с матрицей системы размера 2×2 позже встретятся при вычислении коэффициентов линейной регрессии, а в общем случае могут быть применены к задачам отыскания коэффициентов регрессии с более сложной формой зависимости (все это встретится в последующих курсах).

4 Обратная матрица

Последняя операция, которую мы ещё не обсудили для матриц, — это деление. Эта операция будет определена только для квадратных матриц, то есть матриц размера $n \times n$. Как мы обсуждали на прошлой лекции, умножение матриц — операция некоммутативная, то есть нельзя просто так переставить матрицы местами. Поэтому для деления тоже будет как бы «левое» деление и «правое» деление. Такие названия немного сбивают с толку и поэтому вместо деления матриц используют другую терминологию. Вспомним, что для обычных чисел деление, скажем, на 2 это то же самое, что и умножение на $\frac{1}{2}$. А само по себе число $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ — число обратное к двойке. То есть деление это умножение на *обратное* число. Значит нам нужно всего лишь научиться находить *обратную матрицу*, а дальше мы сможем умножать на обратную матрицу слева или умножать на обратную матрицу справа. Но что же такое обратная матрица? Для чисел обратное число это такое, что в произведении с исходным получается единица: $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. Значит нам нужно решить, что же является единичной матрицей (обозначается E) среди матриц размера $n \times n$.

Определение 1. *Единичной* называют матрицу у которой на диагонали стоят единицы, а все остальные элементы - нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & 1 \end{pmatrix}$$

В таком случае обратной матрицей к матрице A мы будем называть матрицу (обозначается A^{-1}), которая при умножении на исходную даёт единичную матрицу. Оказывается, неважно, какое в этом определении выбрать умножение: если в одном порядке получается единичная, то и в другом тоже.

Определение 2. Матрица A^{-1} — *обратная матрица* к A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Как же найти обратную матрицу? Конечно, можно было бы записать ее с неизвестными коэффициентами, подставить в уравнение выше и решить его. Получится линейная система (о, удачно мы научились выше решать линейные системы методом Крамера!) уравнений. Одна проблема: переменных и уравнений в ней будет n^2, то есть даже для матрицы 2×2 будет система из 4 уравнений с 4 неизвестными. Конечно, такую систему можно решить (в том числе методом Крамера), но это будет очень долго. Однако оказывается, что для обратной матрицы можно сразу выписать явную формулу, хоть она и будет не очень простой. Для начала введём ещё одно определение (на самом деле мы уже знакомы с этим объектом, просто так его не называли).

Определение 3. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется следующее число:

$$A_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\substack{\text{Это знак из}\\ \text{правила знаков}}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Это определитель матрицы}\\ \text{получаемой из исходной}\\ \text{вычеркиванием}\\ i\text{–й строки и } j\text{–го столбца}}}$$

С помощью понятия алгебраического дополнения можно написать явную формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} & & \\ & A_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}^T$$

В правой части этой формулы стоит матрица, составленная из алгебраических дополнений. То есть вместо каждого элемента исходной матрицы мы ставим его алгебраическое дополнение. Рассмотрим поиск обратной матрицы на примере:

Пример 2. Вычислим обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

Для начала нам необходимо вычислить определитель. У данной матрицы первый столбец содержит два нуля и поэтому удобнее всего раскладывать определить именно по нему:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6 - (-4)) - 0 + 0 = -2$$

Теперь записываем формулу для обратной матрицы. Сначала в матрице из алгебраических дополнений мы ставим знаки из правила знаков, а затем дописываем везде нужные определители:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Осталось ответить всего на один вопрос: у всякой ли матрицы существует обратная? Ответ легко увидеть из формулы — единственная операция, которая может не получиться, это деление на определитель. Таким образом, обратной матрицы нет только если у исходной матрицы определитель равен нулю. Для всех остальных матриц (с ненулевым определителем) обратная существует.