Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s21/i)
Семинар 16. Подкова Смейла (20 мая)
И. Щуров, А. Трофимова

Определение 1. Рассмотрим замкнутый квадрат $X = [0,1]^2$ и следующие замкнутые полосы: вертикальные $\Pi_0' = [1/5, 2/5] \times [0,1]$ и $\Pi_1' = [3/5, 4/5] \times [0,1]$ и горизонтальные $\Pi_0 = [0,1] \times [1/5, 2/5]$ и $\Pi_1 = [0,1] \times [3/5, 4/5]$. Определим отображение $S\colon \Pi_0 \cap \Pi_1 \to X$ следующим образом: каждая из горизонтальных полос Π_0, Π_1 сжимается в пять раз по горизонтали, растягивается в пять раз по вертикали и параллельным переносом накладывается на соответствующую вертикальную полосу: Π_0 на Π_0' и Π_1 на Π_1'. В точках квадрата, не лежащих в Π_0 или Π_1, отображение S не определено.

Отображение S называется отображением *подковы Смейла.*

Замечание 1. *Строго говоря, у Смейла было другое отображение: оно было определено на всём квадрате и действовало так: квадрат сжимался по горизонтали, растягивался по вертикали, потом сгибался в виде подковы и эта подкова накладывалась на себя. Ограничение этого отображения на* $\Pi_0 \cup \Pi_1$ *отличается от нашего в том, что* Π_1 *дополнительно переворачивается. Это создаёт некоторую дополнительную трудность при вычислениях, и поэтмоу мы рассматриваем отображение, заданное проще.*

Задача 1. Записать отображение подковы явно с помощью формул.

Задача 2. Записать явно обратное отображение: S^{-1}. Где оно определено?

Определение 2. Для всякого инъективного отображения f определим его композиционную степень для целого n следующим образом: f^0 — это тождественное отображение; если $n > 0$, то $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)$ и если $n < 0$, то $f^n = (f^{-1})^{-n}$. Иными словами, n показывает, сколько раз надо применить отображение, если оно отрицательно — надо применять обратное отображение. Композиционная степень отображения f может быть определена не на всей области определения f.

Задача 3. Постройте явно множества, на которых определено

(a) S^2 (b) S^3 (c) S^4 (d) S^{-2}

Задача 4. Будем записывать координаты (x, y) точки из квадрата в пятеричной системе счисления. Как ответы к предыдущей задачи проще переформулировать в терминах такой записи? Как записать действие S в этих терминах?

Задача 5. Опишите множества точек x, для которых определено $S^n(x)$ для всех

(a) натуральных n; (b) целых отрицательных n; (c) любых целых n.

Определение 3. Обозначим множество, на котором определено S^n для всех $n \in \mathbb{Z}$, через Λ.

Задача 6. Много ли точек в Λ? Они там вообще есть? Их конечное число или бесконечно много? Больше, чем натуральных чисел (в смысле мощности множеств)? Какую площадь занимает Λ?

Задача 7. Найти неподвижные точки S.

Задача 8. Найти все периодические точки S всевозможных периодов. Много их или мало?

Задача 9. Пусть известно, что точки P и Q принадлежат Λ и число $m \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\frac{1}{5^{m+1}} < |y(P) - y(Q)| \leq \frac{1}{5^m}.$$

(В частности, расстояние между P и Q может быть маленьким, но не меньше, чем $1/5^{m+1}$.) Найти такое n, что расстояние между $S^n(P)$ и $S^n(Q)$ не меньше $1/7$. Как быстро происходит «разбегание» близких точек?