Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s21/i)
Семинар 13. Структурная устойчивость (22.04)
И. Щуров, А. Трофимова

Определение 1. Дифференциальные уравнения $\dot{x} = v(x)$ и $\dot{y} = w(y)$ называются *орбитально топологически эквивалентными* если существует такая непрерывная замена координат (гомеоморфизм: обратимое непрерывное отображение, для которого обратное также непрерывно), которая переводит фазовые кривые одного уравнения в фазовые кривые другого уравнения с сохранением направления движения.

Задача 1. Доказать, что уравнения $\dot{x} = x^2 - 1$ и $\dot{y} = y^2 - 4$ орбитально топологически эквивалентны.

Задача 2. Являются ли орбитально топологически эквивалентными уравнения $\dot{x} = x + x^3$ и $\dot{x} = x - x^3$?

Задача 3. Найти замену координат, которая переводит фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = -x + y \quad \dot{y} = -x - y$$

в фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = -x \quad \dot{y} = -y.$$

Задача 4. Пусть уравнения $\dot{x} = v(x)$ и $\dot{y} = \tilde{v}(y)$ орбитально топологически эквивалентны. Пусть x_* — особая точка первого уравнения, устойчивая по Ляпунову. Что вы можете сказать про устойчивость точки $y_* = h(x_*)$ для второго уравнения, где h — гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность?

Определение 2. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ называется *структурно устойчивым*, если оно орбитально топологически эквивалентно своему C^1-малому возмущению. Иными словами, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого w, такого, что $\|w(x)\| < \varepsilon_0$ и $\|\partial w/\partial x\| < \varepsilon_0$, дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x) + w(x)$ орбитально топологически эквивалентно исходному уравнению.

Задача 5. Доказать, пользуясь определением, что уравнение

(a) $\dot{x} = x^2$ (b) $\dot{x} = x^3$

не является структурно устойчивым. Для простоты в качестве фазового пространства можно взять отрезок $[-1, 1]$.

Задача 6. Рассмотрим семейство уравнений на плоскости

$$\dot{x} = c - x^2, \quad \dot{y} = -y$$

Построить фазовые портреты при $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$. Что происхоит при прохождение параметром c значения 0? При каких значениях c уравнение является структурно устойчивым, а при каких не является? (Значение параметра, при прохождении которого фазовый портрет меняет свою топологию, называется *бифуркационным*, а перестройка топологии фазового портрета — *бифуркацией*.)

Задача 7. Докажите, что система, единственная особая точка которой является асимптотически устойчивой, не может быть орбитально топологически эквивалентной системе, единственная особая точка которой асимптотически неустойчива.

Задача 8. Пусть у дифференциального уравнения с особой точкой x_* существует траектория, которая стремится к x_* в прямом времени (то есть $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_*$ для какого-то решения $x = x(t)$) и существует траектория, которая стремится к x_* в обратном времени (то есть $\lim_{t\to-\infty} x(t) = x_*$ для какого-то (быть может, другого) решения $x = x(t)$). Может ли такая система быть структурно устойчивой, если размерность фазового пространства

(a) равна 1?
(b) (*) больше 1?