

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s21/i>)
Семинар 12. Устойчивость положений равновесия (14.04)
И. Щуров, А. Трофимова

Задача 1. [1] Исследовать устойчивость положений равновесия следующих уравнений и систем: определить, являются ли они устойчивыми по Ляпунову, асимптотически устойчивыми?

(a) $\dot{x} = 0.$

(b) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = y.$

(c) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$

(d) $\dot{x} = x^2 \quad \dot{y} = -y.$

(e)
$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Задача 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение, в полярных координатах задающееся следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \sin(\varphi) + 1, \quad \dot{r} = r(1 - r).$$

(a) Построить фазовый портрет в координатах (r, φ) и (x, y) .(b) Что можно сказать о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$?(c) Является ли положение равновесия $(r = 1, \varphi = -\pi/2)$ асимптотически устойчивым?

(d) Устойчивым по Ляпунову?

Задача 3. [2] Используя теорему об устойчивости по первому приближению, исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение. При каких оно является неустойчивым по Ляпунову? При каких теорема не даёт ответ на вопрос об устойчивости?

(a)
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2 \\ \dot{y} = x + y + xy \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + 2y \\ \dot{y} = -5x - 3y \end{cases}$$

Задача 4. Известно, что существует решение $x(t) \in \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$, такое что $x(0) \neq 0$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$. Что можно сказать об устойчивости положения равновесия $x = 0$?

Задача 5. Рассмотрим систему, зависящую от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\varepsilon x - 10\varepsilon y + 4y^3 \\ \dot{y} = 4\varepsilon x + 10\varepsilon y - 6x^5 \end{cases}$$

При каких значениях ε особая точка $(0, 0)$ является асимптотически устойчивой? Устойчивой по Ляпунову? Не является устойчивой? Исследовать все возможные значения ε (в том числе те, при которых теорема об устойчивости по первому приближению не даёт ответа).

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
 [2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.