

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
 Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s21/i>)
 Семинар 8. Линейные уравнения. Разное (25.02.2022)
 И. Щуров, А. Трофимова

Ещё о первых интегралах

Задача 1. При каком значении параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ у системы

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = \alpha y$$

существует непрерывный первый интеграл, определённый в окрестности начала координат? Если он существует, найдите его. Если не существует, докажите, что не существует.

Задача 2. Найти первый интеграл для уравнения

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y,$$

определённый в

- (a) окрестности точки $(1, 0)$;
- (b) окрестности точки $(0, 1)$;
- (c) кольце $1/2 < x^2 + y^2 < 2$.

Линейные уравнения

Задача 3. С помощью метода вариации постоянных решите следующие уравнения:

- (a) $y = x(y' - x \cos x)$;
- (b) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;
- (c) $2x(x^2 + y)dx = dy$;
- (d) $(x + y^2)dy = ydx$;
- (e) $(2e^y - x)y' = 1$;
- (f) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Задача 4. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два каких-то различных решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Выразить через них решение того же уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ для произвольных t_0, x_0 .

Задача 5. Найти все решения уравнения, представляющиеся в виде $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Найти размерность пространства решений. Найти все решения уравнения.

- (a) $\ddot{x} - 4x = 0$;
- (b) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$;
- (c) $\ddot{x} + 4x = 0$;

Задача 6. [1] Рассмотрим уравнение $\dot{x} + x = f(t)$, где $|f(t)| \leq M$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Показать, что это уравнение имеет ровно одно решение, ограниченное при всех t .
- (b) Найти это решение.
- (c) Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

Задача 7. [1] Рассмотрим уравнение

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad x > -1/2$$

- (a) Какова размерность пространства решений этого уравнения?
- (b) Угадать два каких-нибудь решения этого уравнения. (Подсказка: Поищите решения в виде многочленов или $e^{\lambda x}$.)
- (c) Найти все решения этого уравнения.

Разное

Задача 8. Для следующих систем найти какой-нибудь глобальный непостоянный непрерывный первый интеграл, либо доказать, что его не существует.

- (a) $\dot{x} = \sin(x + y), \quad \dot{y} = \cos(x + y + z), \quad \dot{z} = 0;$
 (b) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \sin(x^2 + y^2 + z^2);$
 (c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = -3z;$
 (d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = 3z.$

Задача 9. Для следующих систем осуществить переход к полярным координатам, то есть записать уравнения для новых координат φ и r , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Построить фазовые портреты в новых и старых координатах.

- (a) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x;$
 (b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x;$
 (c) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y;$
 (d) $\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y;$
 (e) $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y;$
 (f) (*) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2); \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$

Задача 10. Найти все значения параметра s , при которых система

$$\dot{x} = 5y, \quad \dot{y} = sx$$

имеет непостоянные периодические решения. Для каждого из этих значений s записать уравнение фазовых кривых, соответствующих периодическим решениям.

Задача 11. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы

$$\dot{x} = 6x^4, \quad \dot{y} = -7y \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 6$. Найти $\inf_t y(t)$ и $\sup_t y(t)$, где инфимум и супремум берутся по всем t , при которых решение определено.

Задача 12. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 5xz, \quad \dot{y} = -6y, \quad \dot{z} = 0.$$

Найти все начальные условия, при которых решение имеет конечный предел при $t \rightarrow +\infty$.

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.