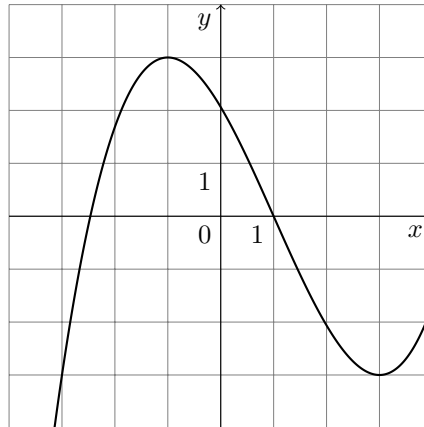


Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s21/i>)**Семинар 6. Производная вдоль векторного поля. Консервативные уравнения с одной степенью свободы (18.02.2022)***И. Щуров, А. Трофимова***Задача 1.** Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

- (a) $(2, 3)$; (b) (x, y) ; (c) (y, x) ; (d) $(1, -e^y)$.

Задача 2. (Частично основано на [1].) Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \quad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$
- (b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \quad F(x, y) = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$
- (c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1+y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1+y^2}, \end{cases} \quad F(x, y) = xy - \sqrt{1+y^2}.$
- (d) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \quad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz.$

Задача 3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Построить на одном и том же рисунке эскизы графиков следующих функций. (Обратите особое внимание на поведение производной вблизи границ области определения. Используйте теорему о производной сложной функции.)

- (a) $\sqrt{f(x)}$; (c) $\sqrt{f(x) - 3}$; (e) $\sqrt{f(x) + 1}$; (g) $\sqrt{f(x) + 3}$;
 (b) $\sqrt{f(x) - 2}$; (d) $\sqrt{f(x) - 4}$; (f) $\sqrt{f(x) + 2}$; (h) $\sqrt{f(x) + 4}$.

Задача 4. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = f'(x)$, где $f(x)$ — функция из предыдущей задачи.

- (a) Найти потенциальную энергию. Как выглядит график потенциальной энергии?
 (b) Записать функцию полной энергии.
 (c) Построить несколько линий уровня функции полной энергии.
 (d) Построить фазовый портрет. Отметить все положения равновесия. Указать, какие из них являются устойчивыми, а какие неустойчивыми. Указать все начальные условия, соответствующие периодическим решениям. Указать все начальные условия, для которых решения имеют предел при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

Задача 5. Построить фазовые портреты для следующих уравнений. Найти все положения равновесия, указать, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми. Указать все начальные условия, соответствующие периодическим решениям. Указать все начальные условия, для которых решения имеют предел при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

(a) $\ddot{x} = -\sin x;$

(b) $\ddot{x} = x^2 - 1;$

(c) $\ddot{x} = 1 - x^2;$

(d) $\ddot{x} = 4x^3 - 4x;$

(e) $\ddot{x} = -4x^3 + 4x;$

(f) $\ddot{x} = x^3 - x^2 - 2x;$

(g) $\ddot{x} = -x^3 + x^2 + 2x;$

Задача 6. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ существует решение уравнения

$$\ddot{x} = (x - 1)(x - 3)(x - \alpha),$$

имеющее разные конечные пределы при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$?

Задача 7. Докажите, что все решения уравнения

$$\ddot{x} = -x^3 + 10x^2 - 15x + 9$$

являются ограниченными.

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.