Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s21/i)
Семинар 3. Единственность решений и замены переменных (28.01.2020)
И. Щуров, А. Трофимова

Задача 1. [1] Подбирая подходящую замену, решить уравнение.

(a) $y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$;
(b) $y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10}$;
(c) $y' = \sin(x+y)$;
(d) $y' = \sqrt{4x+2y-1}$;
(e) $(x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1$;
(f) $xy' = x + y$.

Задача 2. Построить интегральные и фазовые кривые уравнения.

(a) $\dot{x} = x$.
(b) $\dot{x} = x^2 - x$.

Задача 3. Рассмотрим систему
$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y.$$
Найти решения φ и ψ с начальными условиями $\varphi(0) = (1,1)$ и $\psi(7) = (1,1)$. Как связаны функции φ и ψ? Как связаны их графики, то есть интегральные кривые? Построить фазовую кривую, соответствующую решению φ, и фазовую кривую, соответствующую решению ψ. Чем они отличаются?

Задача 4. Рассмотрим автономное уравнение
$$\dot{x} = v(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n.$$
Пусть $v \in C^1$ (имеет непрерывную производную). Докажите, что в этом случае через каждую точку фазового пространства проходит ровно одна фазовая кривая.

Задача 5. Для следующих систем уравнений:
- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость $(x(t), y(t))$ (подсказка: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);
- найти уравнения фазовых кривых, то есть зависимость $y(x)$.

(a) $\dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 1$;
(b) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = y$;
(c) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y$;
(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$;
(e) $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y$;
(f) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$;
(g) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$;
(h) $\dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = -y$.

Задача 6. Рассмотрим систему
$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$
(a) Нарисовать векторное поле.
(b) Нарисовать эскиз фазовых кривых.
(c) Угадать, как будут выглядеть настоящие фазовые кривые и доказать, что действительно так.

Теорема 1. *Рассмотрим автономную систему*
$$\dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y). \tag{1}$$
и неавтономное уравнение
$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \tag{2}$$
Для любой точки $P = (x_0, y_0)$, такой, что $f(x_0, y_0) \neq 0$, фазовая кривая автономной системы (1)*, проходящая через P, в некоторой окрестности P совпадает с интегральной кривой соответствующего неавтономного уравнения* (2)*.*

Задача 7. Для следующих систем уравнений убедиться в том, что теорема 1 работает.

(a) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$; (b) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$; (c) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$; (d) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$.

Задача 8. Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a) $\ddot{x} = 1$; (b) $\ddot{x} = x$; (c) $\ddot{x} = \dot{x}$; (d) (*) $\ddot{x} = \dot{x} + x$.

Список литературы

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.