

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s21/i>)**Семинар 2. Автономные уравнения на прямой и уравнения с разделяющимися переменными (21.01)**

И. Щуров, А. Трофимова

Замечание 1. Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением $\dot{x} = f(x, t)$. В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через x , а искомую функцию через y , и записывать уравнение в виде $y' = f(x, y)$ или $dy/dx = f(x, y)$. Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

Определение 1. Геометрическое место точек плоскости (x, y) , в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная.

Задача 1. Начертить несколько разных изоклин для следующих уравнений. Затем начертить эскизы интегральных кривых.

(a) $y' = 2x - y$.

(d) $yy' + x = 0$.

(b) $y' = y - x^2$.

(e) $xy' = 2y$.

(c) $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$.

(f) $xy' + y = 0$.

(g) $y' = \frac{y}{x+y}$.

Задача 2. [1], см. также [2] и [3]. Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести? Что вы можете сказать об области определения решений?

Задача 3. [4] Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

(a) $y' = x^2$.

(g) $\dot{x} = x^2 + 1$.

(b) $y' = e^x$.

(h) $\dot{x} = x \ln x, x > 0$.

(c) $y' = e^y$.

(i) $\dot{x} = 10^x$.

(d) $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$

(j) $\dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

(e) $\dot{x} = -3x, x(3) = 10$.

(f) $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

(k) $\dot{x} = \cos(x - t)$.

Задача 4. Найти все решения уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$ с начальным условием $x(0) = 0$.

Задача 5. Рассмотрим задачу Коши:

$$xy' = 3y, \quad y(-1) = 1.$$

(a) Показать, что любая функция вида

$$y(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0; \\ Cx^3, & x > 0. \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению и начальному условию.

- (b) Объяснить, почему это не противоречит теореме существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения?

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \frac{f(y)}{g(x)} \quad (1)$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Замечание 2. Для уравнений с разделяющимися переменными есть явный алгоритм отыскания решений (правда, иногда эти решения могут быть заданы неявной функцией).

Запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$$

Дальше магия (мы обсудим, какой смысл означает это равенство, когда освоимся с дифференциальными формами):

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$$

После интегрирования получается равенство, связывающее y и x , то есть выражающее неявно функцию $y(x)$.

Если была поставлена задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, решение можно записать в таком виде:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{f(z)} = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \quad (2)$$

Задача 6. (*) Пусть $F(y) = \int_{y_0}^y \frac{dz}{f(z)}$ и $y = y(x)$ — некоторая функция.

- (a) Найти $\frac{d}{dx}F(y(x))$ (выразить результат через $f(y(x))$ и $y'(x)$).
 (b) Дифференцируя обе части равенства (2) по переменной x , показать, что функция $y(x)$, удовлетворяющая (2), удовлетворяет также (1), то есть является решением исходного уравнения.

Задача 7. Найдите все решения уравнения с разделяющимися переменными. Нарисуйте соответствующее поле направлений и его интегральные кривые.

- (a) $y' = y/x$; (c) $y' = y/(2x)$; (e) $y' = -x/y$; (g) $y' = -xy$.
 (b) $y' = 2y/x$; (d) $y' = -y/x$; (f) $y' = xy$;

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
 [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
 [3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. <https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday>.
 [4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.