

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s21/i>)**Семинар 1. Основные понятия (14.01)***И. Щуров, А. Трофимова*

Задача 1. Для каждого уравнения построить его поле направлений. Пользуясь полем направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Угадать общее решение, построить «настоящие» интегральные кривые и сравнить с эскизом.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \dot{x} = 0; & \text{(c)} \dot{x} = 2t; & \text{(e)} \dot{x} = -\frac{x}{t}; & \text{(g)} (*) \dot{x} = \frac{2x}{t}. \\ \text{(b)} \dot{x} = -1; & \text{(d)} \dot{x} = \frac{x}{t}; & \text{(f)} \dot{x} = -\frac{t}{x}; & \end{array}$$

Задача 2. [2, 3] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) в момент времени t равна $x(t)$ и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.) Тогда функция $x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0.$$

- Нарисовать поле направлений для этого дифференциального уравнения. Как оно будет меняться в зависимости от k ?
- Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?
- Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
- Угадать решение: найти зависимость $x(t)$ явно и проверить, что она удовлетворяет уравнению.
- Пусть в начальный момент времени $t = 0$ размер популяции равен x_0 . Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

Задача 3. [4] Согласно модели Солоу, скорость роста капиталовооруженности экономики k удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k, \tag{1}$$

где $k = k(t)$ — капиталовооружённость в момент времени t , $f(k)$ — функция производства.

Полагая $f(k) = \sqrt{k}$, решить для получившегося уравнения все пункты задачи 2, кроме 2d и 2e.

Задача 4. [1, 3] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 2, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводимая за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно

ресурсов, чтобы продолжить род.) Записать дифференциальное уравнение, описывающее данную модель (она называется моделью Ферхюльста). Решить для неё все пункты задачи 2, кроме 2d и 2e. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

Задача 5. Решая уравнение $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$ методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа e .

Задача 6. Напишите на языке Python функцию `solve_euler(f, t0, x0, t, n)`, которая решает уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ с помощью метода Эйлера, разбивая отрезок $[t_0, t]$ на n равных частей (то есть $\Delta t = (t - t_0)/n$), и возвращает `np.array` длины $(n + 1)$, содержащий значения приближенного решения в каждой из точек разбиения (то есть (x_0, x_1, \dots, x_n)). Убедитесь визуально (строая соответствующие графики), что приближенное решение сходится к настоящему. (Возьмите какую-нибудь функцию f , для которой вы знаете настоящее решение.)

Список литературы

- [1] Verhulst, Pierre-François (1838). *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*. Correspondance Mathématique et Physique. 10: 113–121.
- [2] Malthus *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798
- [3] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
- [4] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.