

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 28 (17 декабря 2019)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих*Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcendentals*.**Задача 1.** Представить значение выражения в форме $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a)
- $(2 + 3i)(3 - 2i)$
- ; (b)
- $(1 + 2i)^3$
- ; (c)
- $1/i$
- ; (d)
- $1/(1 + i)$
- .

Задача 2. Записать в виде $z = re^{i\varphi}$ комплексное число

- (a) 1 (b)
- -1
- (c)
- $2i$
- ; (d)
- $i + 1$
- ;

Задача 3. Представить значение выражения в форме $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a)
- $(1 + i)^{2022}$
- ; (b)
- $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})^{1984}$
- .

Задача 4. Корнем степени n из комплексного числа z называется такое комплексное число w , что $w^n = z$. Найти все корни пятой степени из

- (a) единицы. (b)
- $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2})$
- минус единицы.

Нарисовать их на комплексной плоскости.

Задача 5. Докажите, что

- (a)
- $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- (b)
- $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Ещё об интегралах**Задача 6.** Найти интеграл

- (a)
- $\int \frac{x^2}{x+4} dx$
- (d)
- $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+9)}$
-
- (b)
- $\int \frac{dt}{(t+4)(t-1)}$
- (e)
- $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$
-
- (c)
- $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2} dx$
- (f)
- $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 4x + 13}$

Задача 7. Функция $\frac{\sin t}{t}$ не является интегрируемой в элементарных функциях, то есть её интеграл нельзя записать в виде формулы, в которую входят только функции, которые мы проходили до сих пор (степени, экспоненты, тригонометрические функции и т.д.). Рассмотрим её первообразную, заданную следующим образом:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

(Поскольку значение изменение значения функции в конечном числе точек не влияет на значение интеграла, тот факт, что подынтегральное выражение не определено в нуле, не приводит к проблемам: можно просто доопределить его в нуле единицей по непрерывности.)

- (a) Найдите все точки локальных экстремумов функции $\text{Si}(x)$. (Только x -координаты, соответствующие значения находить не нужно.)
- (b) В какой точке достигается глобальный максимум?
- (c) Нарисуйте эскиз графика.
- (d) Выпишите тейлоровский многочлен степени n в окрестности нуля.

Задача 8. Найти интегралы, пользуясь различными методами

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\int \cos(x)(1 + \sin^2 x) dx$ | (f) $\int \ln(x^2 - 1) dx$ | (k) $\int (x + \sin x)^2 dx$ |
| (b) $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctg x}}{1 + x^2} dx$ | (g) $\int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x - 5} dx$ | (l) $\int \frac{dx}{x + x\sqrt{x}}$ |
| (c) $\int_1^3 x^4 \ln x dx$ | (h) $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3} dx$ | (m) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x+1}}$ |
| (d) $\int e^{x+e^x} dx$ | (i) $\int \sqrt{1+e^x} dx$ | (n) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$ |
| (e) $\int \frac{dt}{1+e^{-t}}$ | (j) $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$ | (o) (*) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ |