Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 27 (15 декабря 2021)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcedentals.*

Задача 1. Сходится ли ряд? Если да, найти его сумму.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2-1}$

(c) (⌂) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$

(d) (⌂) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$

(e) (⌂) $\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-2n+3)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

(h) (⌂) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-1}}$

Задача 2. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha};$$

Задача 3. (⌂) Найти значение p, при котором ряд сходится

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$

Подсказка. Воспользуйтесь интегральным признаком сходимости.

Задача 4. Докажите, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится, то есть если

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n < \infty.$$

Подсказка. Рассмотрите последовательность $b_n = a_n + |a_n|$. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Задача 5. Докажите признак Лейбница: пусть для знакочередующегося ряда модули членов невозрастают, то есть для всех k, $a_{k+1} \le a_k$. Если при этом

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

то ряд сходится.

Подсказка. Рассмотрите последовательности

$$A_m = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k a_k$$

и

$$B_m = \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k a_k.$$

Докажите, что они монотонны, ограничены и их разность стремится к нулю.

Замечание 1. *На лекции в этом месте была ошибка: было пропущено условие монотонного убывания модулей. Без него признак не работает, как показывает следующая задача.*

Задача 6. (🏠) Докажите, что ряд

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \dots$$

расходится, хотя он знакочередующийся и его общий член стремится к нулю.

Подсказка. Рассмотрите частичные суммы этого ряда с чётными номерами.

Задача 7. При каких значениях α сходится ряд?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}?$$

Задача 8. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Пусть существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c.$$

Докажите, что если $c > 1$, то ряд расходится, а если $c < 1$, то сходится абсолютно. Что может происходить при $c = 1$?

Подсказка. Сравните члены ряда с геометрической прогрессией.

Задача 9. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Пусть существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c.$$

Докажите, что если $c > 1$, то ряд расходится, а если $c < 1$, то сходится абсолютно. Что может быть при $c = 1$?

Подсказка. Сравните члены ряда с геометрической прогрессией.

Задача 10. Сходится ли ряд? Сходится ли он абсолютно?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{2^n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;

Задача 11. Сходится ли ряд?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$;

(d) (*)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Задача 12. (*) Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^k}$$

при всех значениях $a > 0$, при которых ряд сходится.

Подсказка. Этот ряд можно представить как бесконечную сумму геометрических прогрессий.