

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 26 (10 декабря 2021)**

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcendentals*.**Задача 1.** Найти интеграл $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ для следующих функций f . Построить графики f и F . В каких точках F имеет изломы и почему?

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad a = 3$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad a = -2$

(c) $(\heartsuit) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}, \quad a = 0$

Задача 2. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл сходится? Найти значение интеграла для всех тех значений α , для которых он сходится.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

(d) $(\heartsuit) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Задача 3. Рассмотрим пределы

$$A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-t} \frac{dx}{x} + \int_t^1 \frac{dx}{x}$$

$$B = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-t} \frac{dx}{x} + \int_{t^2}^1 \frac{dx}{x}$$

Покажите, что $A \neq B$.**Замечание 1.** Эта задача показывает, что интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

действительно не определён, хоть это и интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку. Если бы он был определён, было бы логично ожидать, что его значение равно и пределу A , и пределу B .

Задача 4. Найти значение несобственного интеграла, если интеграл сходится.

$$(a) \int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{|x|}}$$

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$(d) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$(e) (\heartsuit) \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(f) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(g) (\heartsuit) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{9 + x^6}$$

$$(h) \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^3 - x}$$

$$(i) \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$$

$$(j) (\heartsuit) \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$$

$$(k) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$(l) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + 1)}{e^{x^2}} dx$$

Задача 5. Сходится ли интеграл?

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

$$(b) \int_1^{\infty} \frac{2 + e^{-x}}{x} dx$$

$$(c) (\heartsuit) \int_1^{\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}} dx$$

$$(d) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

Задача 6. При каких значениях α интеграл сходится? Найти значение интеграла для тех α , при которых он сходится.

$$(a) \int_0^1 x^{\alpha} \ln x dx$$

$$(b) (\heartsuit) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

Задача 7. Найти интеграл

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 8. Доказать равенство

$$(a) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$(b) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y} dy$$