Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 25 (8 декабря 2021)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcedentals.*

Определение 1. Неопределенный интеграл — это множество всех первообразных функции f. Обозначается

$$\int f(x)\,dx$$

Пример 1. Например,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — произвольная константа.

Задача 1. Докажите следующее утверждение. Пусть $F(t)$ — первообазная функции $f(t)$, и h — дифференцируемая функция. Тогда $F(h(x))$ — первообразная для функции $f(h(x))h'(x)$.

Замечание 1. *Это утверждение — формула замены переменных в неопределенном интеграле. Её можно записать так:*

$$\int f(t)\,dt = \int f(h(x))h'(x)\,dx,$$

где $t = h(x)$. (Иными словами, в левой части нужно вычислить интеграл и затем подставить в нём вместо t функцию $h(x)$.) Эта формула очень похожа на формулу замены переменных в определенном интеграле, которую мы обсуждали на лекции.

Задача 2. С помощью формулы замены переменных найти следующие интегралы. (Не забудьте вернуться к исходной переменной; и константу не забудьте.)

(a) $\displaystyle\int \sin(\pi x)\,dx;$

(b) $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx;$

(c) (🏠) $\displaystyle\int x^2(x^3+2)^{12}\,dx;$

(d) $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,dx;$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx;$

(f) (🏠) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx;$

(g) (🏠) $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}\,x;$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx;$

(i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$

Задача 3. Пусть f и g — две дифференцируемые функции. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f'(x)g(x)$. Докажите, что тогда функция $G(x) = f(x)g(x) - F(x)$ — первообразная для функции $f(x)g'(x)$.

Замечание 2. *Это утверждение называется* правилом интегрирования по частям. *С помощью неопределенного интеграла оно записывается следующим образом:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Задача 4. Найти интегралы с помощью интегрирования по частям.

(a) $\int x\sin 3x\,dx$;

(b) $\int xe^{-x}\,dx$;

(c) (⌂) $\int e^x \sin 2x\,dx$;

(d) $\int \ln x\,dx$;

(e) (⌂) $\int (\ln x)^2\,dx$;

(f) (⌂) $\int x^5 \ln x\,dx$.

Задача 5. Найти определенные интегралы

(a) (⌂) $\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

(b) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

(c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

(d) (⌂) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

(e) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$

(f) (⌂) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Задача 6. Найти интеграл с помощью интегрирования по частям и других методов

(a) $\int x^2 \sin \pi x\,dx$

(b) (⌂) $\int \ln(2x+1)\,dx$

(c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

(d) (⌂) $\int_0^\pi x^3\cos x\,dx$

(e) (⌂) $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

(f) $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

(g) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

(h) (⌂) $\int x\ln(1+x)\,dx$

(i) $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$

(j) $\int e^x \sin x\,dx$

Задача 7. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

(a) Найти его значение с помощью замены $x = \sin t$.
(b) Можно ли при этой замене в качестве новых пределов интегрирования взять числа π (нижний) и $\pi/2$ (верхний). Почему?