Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 24 (3 декабря 2021)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcedentals.*

Задача 1. Найти все первые частные производные следующих функций

(a) x^3y^2;
(b) e^{x^2+y};
(c) (🏠) $\sin(x^2+y^2)$;
(d) $\max(x, y)$;
(e) (🏠) $|x|+|y|$;
(f) (🏠) xy^2z^3.

Задача 2. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5xy$.
(a) Найдите её первые частные производные
(b) В каких точках обе частные производные обращаются в ноль?
(c) Постройте графики функций $f(x, 0)$ и $f(0, y)$.
(d) Как вы думаете, является ли точка $(0, 0)$ минимумом функции f?
(e) Постройте график функции $h(x) = f(x, x)$.
(f) Что вы теперь думаете про точку $(0, 0)$?

Определение 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Её *первообразной* называется такая функция F, непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b), что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема 1. *(Формула Ньютона — Лейбница) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда*
1. *Пусть $G(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$. Тогда G — первообразная f.*
2. *$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где F — какая-нибудь первообразная f.*

Задача 3. С помощью формулы Ньютона — Лейбница найти следующие интегралы, если они существуют.

(a) $\displaystyle\int_3^{-4} 2\,dx$
(b) $\displaystyle\int_0^1 (2x+4x^3)\,dx$;
(c) $\displaystyle\int_1^t \frac{2\,dx}{x}$;
(d) $\displaystyle\int_{-1}^t \frac{2\,dx}{x}$;
(e) (🏠) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$;
(f) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$;
(g) $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x + \cos x)\,dx$;
(h) (🏠) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^x + e^{-x})\,dx$.

Задача 4. Пусть

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

Найти $G'(x)$.

Задача 5. Докажите, что

(a) $\displaystyle\int_1^{100} e^{-x^2} dx < \frac{99}{e}$; (b) $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin x \, dx < 2$; (c) (🏠) $\displaystyle\int_1^{100} e^{-x^2} dx < \frac{1}{e}$.

Задача 6. Найти все возможные функции $F(x)$, определённые на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которых справедливо утверждение

(a) $F'(x) = \frac{1}{x}$ (b) (🏠) $F'(x) = \frac{1}{x^2}$

для всех $x \neq 0$.

Задача 7. Найти площадь области, ограниченной кривыми.

(a) $y = x$ и $y = x^2$;
(b) $y = x^2$ и $y^2 = x$;
(c) (🏠) $4x + y^2 = 12$ и $y = x$;
(d) (🏠) $y = |x|$ и $y = x^2 - 2$;
(e) $y = 1/x$, $y = x$ и $y = x/4$ в области $x > 0$;
(f) (🏠) $y = 3x^2$, $y = 8x^2$ и $4x + y = 4$ в области $x \geq 0$.