Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 23 (1 декабря 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, она интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Задача 1. Найдите определенные интегралы, пользуясь определением. Поскольку подыинтегральные функции непрерывны, интеграл существует, и значит достаточно найти предел интегральных сумм для какой-нибудь последовательности разбиений со стремящимися к нулю диаметрами. Проще всего использовать разбиение на отрезки одинаковой длины, а в качестве отмеченных точек брать концы отрезков.

(a) $\int_{-1}^{2} 3\,dx$;

(b) $\int_{1}^{3} x\,dx$;

(c) (🏠) $\int_{-1}^{3} x\,dx$;

(d) (🏠) $\int_{0}^{1} e^x\,dx$.

Задача 2. (*) Докажите по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пользуясь этим равенством, вычислите по определению

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Задача 3. Пользуясь геометрической интерпретацией определённого интеграла как площади с учётом знака найти следующие интегралы.

(a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$;

(b) (🏠) $\int_a^b x\,dx$;

(c) $\int_{-3}^{3} x^2 e^{-x^2} \sin x\,dx$.

Задача 4. Докажите, пользуясь определением, что

(a) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;

(b) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, где c — некоторая константа.

(Все равенства рассматриваются при условии, что интегралы в правой части существуют.)

Задача 5. Докажите, пользуясь определением, что если для всех $x \in [a, b]$, $f(x) \le g(x)$ и функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x).$$

Задача 6. (🏠) Докажите, что если функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$, $f(x) < g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) < \int_a^b g(x).$$

Задача 7. (🏠) Докажите, что

$$\int_0^1 x^3\, dx < \frac{1}{3}.$$

Подсказка: вам нужна задача 2.

Задача 8. Докажите, пользуясь определением, что интеграл существует, и найдите его.

$$\int_0^2 f(x)\, dx,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1, \\ 5 & x = 1, \\ 3 & x > 1. \end{cases}$$

Задача 9. (🏠) Докажите, пользуясь определением, что интеграл существует, и найдите его.

$$\int_1^4 f(x)\, dx,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 2, \\ 158 & x = 2. \end{cases}$$

Задача 10. Пусть $a < c < b$. Пусть f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Докажите, что f интегрируема на $[a, c]$ и

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Это свойство называется *аддитивностью* определённого интеграла.