

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 22 (26 ноября 2021)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих***Задача 1.** Про функцию  $f$  известно, что она  $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$f^{(n)}(x_0) = 42,$$

где  $f^{(i)}$  —  $i$ -я производная функции  $f$ . Пусть(а)  $n = 2021$ ,(б)  $n = 2022$ .Может ли точка  $x_0$  быть точкой максимума функции  $f$ ? Точкой минимума? Не быть ни тем, ни другим? Ответ обосновать.**Теорема 1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция  $f$  имеет  $n$  непрерывных производных на отрезке  $[a, b]$  и  $(n+1)$  производную на интервале  $(a, b)$ . Тогда существует такое  $c \in (a, b)$ , что

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

**Задача 2.** С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вычислите без использования компьютера(а)  $\cos 1$  с точностью до сотых;(б)  $\ln(3/2)$  с точностью до сотых;(с)  $e^{1/4}$  с точностью до тысячных

и докажите оценку на погрешность.

**Задача 3.** Разложите в ряд Тейлора в точке  $x_0 = 0$  функции(а)  $\sin x$ ;(б)  $\cos x$ ;(с)  $e^x$ 

и докажите, что ряд сходится к соответствующей функции всюду.

**Замечание 1.** Ряд Тейлора в точке  $x_0 = 0$  также называется рядом Маклорена.**Задача 4.** Разложите в ряд Тейлора в точке  $x_0 = 1$  функцию  $\ln x$  и докажите, что(а) ряд Тейлора сходится к этой функции на интервале  $(1/2, 2)$ ;(б) ряд Тейлора расходится при  $x < 0$  и  $x > 2$ .**Задача 5.** Разложите в ряд Тейлора функцию  $\frac{1}{1-x}$  в точке  $x_0 = 0$ . При каких значениях  $x$  ряд Тейлора сходится к породившей её функции?**Замечание 2.** Кстати, если разложить функцию  $\ln(1-x)$  в ряд в нуле и продифференцировать все члены этого ряда, получится ряд для  $-\frac{1}{1-x}$ .