Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 21 (24 ноября 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Определение 1. *Многочленом Тейлора* степени n для функции f в точке x_0 называется следующее выражение:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

где $f^{(k)}$ — это k-я производная f, $f^{(0)} = f$.

Задача 1. Найти многочлены Тейлора произвольной степени n в заданной точке x_0 для функций

(a) $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 4$;
(b) e^{2x}, $x_0 = 0$;
(c) $\sin x$, $x_0 = 0$;
(d) (🏠) $\cos x$, $x_0 = 0$;
(e) (🏠) $\ln x$, $x_0 = 1$;
(f) (🏠) $\frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$.

Теорема 1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Если существует n-я производная функции f в точке $x = x_0$, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$.

Задача 2. Докажите, что многочлен Тейлора однозначно задаётся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. То есть если какой-то многочлен $P_n(x)$ степени не выше n удовлетворяет условию

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то обязательно $P_n(x) = T_n(x)$.

Если функцию f представляют в виде (1), также говорят, что f *разложили в ряд Тейлора до степени n (с остаточным членом в форме Пеано)* в точке x_0 (или вблизи точки x_0).

Задача 3. Найти разложения следующих функций в ряд Тейлора до степени n включительно (то есть остаток должен быть $o(x^n)$ при $x \to 0$) в точке 0. (Подсказка: можно не вычислять производные сложных функций, а подставить один многочлен в другой.)

(a) $\sin(\sin x), \quad n = 3$
(b) (🏠) $\ln(\cos x), \quad n = 6$
(c) $\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}, \quad n = 2$

Задача 4. Вычислить пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\cos x - 1}$;

(b) (⌂) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\cos x - 1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x^3}$;

(d) (⌂) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{\sin(x^2)}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}$.

(g) (⌂) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2 - x^3)}{\ln\cos x}$;

(h) (⌂) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$;

(i) (⌂) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$;

(k) (⌂) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(\cos(x)) - 1}{\sin(\sin(x) - 1)}$.

Задача 5. (*) Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(a) Докажите, что функция f является бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой.
(b) Вычислите все полиномы Тейлора для $f(x)$, $x_0 = 0$.
(c) Для каких x справедливо соотношение $T_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$?

Задача 6. (*) Докажите, что существует такая функция f, определённая на всей прямой и
(a) непрерывная
(b) дифференцируемая
(c) дважды дифференцируемая
(d) бесконечно дифференцируемая
во всех точках, что $f(x) = 0$ при $|x| > 2$ и $f(x) = 1$ при $|x| < 1$.