

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 20 (19 ноября 2021)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих***Задача 1.** Пользуясь при необходимости правилом Лопиталья найдите предел

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x}{x}; & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}; & \text{(g)} \textcircled{\heartsuit} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \\
\text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + 1}; & \text{(e)} \textcircled{\heartsuit} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}; & \text{(h)} \textcircled{\heartsuit} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{(\sin x)^2} \\
\text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}; & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}. &
\end{array}$$

Задача 2. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Применимо ли к нему утверждение из правила Лопиталья? Что получится, если применить правило Лопиталья? Чему равен этот предел?

Определение 1. Говорят, что функция f есть O -большое от функции g при $x \rightarrow x_0$ если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и является ограниченным в некоторой проколотой окрестности точки x_0 .

Если $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow \infty$, вместо проколотой окрестности в этом определении нужно брать соответствующую «окрестность бесконечности». Например, утверждение $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ означает, что существует такая константа D , что $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничено на луче $(D, +\infty)$.

Определение 2. Говорят, что функция f есть o -малое от функции g при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. В качестве x_0 могут использоваться вещественные числа, а также бесконечности.

Замечание 1. На письме выражение « f есть O -большое (соответственно, o -малое) от g » записывается как $f(x) = O(g(x))$ (соответственно, $f(x) = o(g(x))$). При этом, однако, следует учитывать, что знак равенства здесь — некоторая условность, потому что $O(g(x))$ и $o(g(x))$ — это не конкретные функции, а множества функций. Например, неправда, что если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) = f_2(x)$ (чего мы обычно ожидаем от знака равенства). Правильнее было бы писать $f(x) \in o(g(x))$ и т.д., но так никто не делает, и мы тоже не будем.

Задача 3. Какие из следующих равенств верны при $x \rightarrow 0$?

- | | |
|---|--|
| (a) $0 = O(1)$; | (l) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = O(x^3)$; |
| (b) $1 = O(0)$; | (m) $(\heartsuit) x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^3)$; |
| (c) $1 = o(1000)$; | (n) $x^3 + 100x^2 - 23x = O(x^3)$; |
| (d) $1000 = O(1)$; | (o) $x^3 + 100x^2 - 23x = o(x^3)$; |
| (e) $1 = o(1000)$; | (p) $x^3 + 100x^2 - 23x = O(x)$; |
| (f) $x = O(x^2)$; | (q) $(\heartsuit) x^3 + 100x^2 - 23x = o(x)$. |
| (g) $x = o(x^2)$; | (r) $\ln(x + 1) = O(x)$; |
| (h) $x^2 = O(x)$; | (s) $(\heartsuit) \ln \ln(x + 1) = o(x)$; |
| (i) $(\heartsuit) x^2 = o(x)$; | (t) $x = O(e^x - 1)$; |
| (j) $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | (u) $(\heartsuit) x = o(e^x - 1)$ |
| (k) $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | (v) $(\heartsuit) \sin x = o(x)$; |
| | (w) $\sin x = O(x)$; |

Задача 4. (\heartsuit) Какие из следующих равенств верны при $x \rightarrow +\infty$?

- | | |
|---------------------|--|
| (a) $1 = O(1)$; | (n) $x^2 = o(x)$; |
| (b) $1 = o(1)$; | (o) $\ln x = O(x)$; |
| (c) $1 = O(1000)$; | (p) $\ln x = o(x)$; |
| (d) $1 = o(1000)$; | (q) $x = O(e^x)$; |
| (e) $1 = O(x)$; | (r) $x = o(e^x)$ |
| (f) $1 = o(x)$; | (s) $\sin x = o(x)$; |
| (g) $1 = O(0)$; | (t) $\sin x = O(1)$; |
| (h) $1 = o(0)$; | (u) $\sin x = o(1)$; |
| (i) $0 = O(1)$; | (v) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = O(x^3)$; |
| (j) $0 = o(1)$; | (w) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^3)$; |
| (k) $x = O(x^2)$; | (x) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^4)$; |
| (l) $x = o(x^2)$; | (y) $(x^3 + 100x^2 - 23x + 5) \sin x = O(x^3)$; |
| (m) $x^2 = O(x)$; | (z) $(x^3 + 100x^2 - 23x + 5) \sin x = o(x^4)$. |

Задача 5. Какие из следующих утверждений верны при $x \rightarrow 0$?

- (a) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) = o(g(x))$.
 (b) Если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x) = O(g(x))$.
 (c) Если $f(x) = O(g(x))$, то $g(x) = O(f(x))$.
 (d) (\heartsuit) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x)h(x) = O(g(x)h(x))$.
 (e) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.
 (f) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$.
 (g) (\heartsuit) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g(x))$.
 (h) (\heartsuit) Если $f_1(x) = O(1)$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x))$.
 (i) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
 (j) (\heartsuit) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
 (k) (\heartsuit) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$.
 (l) (\heartsuit) Если $f_1(x) = o(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$.
 (m) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = O(h(x))$.

(п) (☞) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.

(о) (☞) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.

(р) (☞) Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.

Замечание 2. Запись $f(x) = g(x) + o(h(x))$ означает, что $f(x) - g(x) = o(h(x))$. Аналогично, запись $f(x) = g(x) + O(h(x))$ означает, что $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Задача 6. Пусть известно, что $f(x) = 42 + o(1)$ при $x \rightarrow 0$. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Задача 7. Пусть известно, что $f(x) = 1 + 2x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Задача 8. Пусть известно, что $f(x) = 3x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Задача 9. Пусть известно, что $f(x) = 1 + O(x)$ при $x \rightarrow 0$. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Задача 10. Пусть известно, что $f(x) = 1 + 3x + O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

Задача 11. (☞) Существует ли функция, являющаяся $o(x)$, но не являющаяся $O(x^2)$

(а) при $x \rightarrow 0$;

(б) при $x \rightarrow +\infty$?

Задача 12. Пусть $f(x) = O(g(x))$. Верно ли, что $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$.

Задача 13. Пусть $f(y) = y + 2y^2 + o(y^2)$ при $y \rightarrow 0$. Представить $f(3x + x^2)$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, где $P(x)$ — многочлен степени не больше 2.

Задача 14. (☞) Пусть $f(y) = y + 2y^2 + o(y^2)$ при $y \rightarrow 0$. Представить $f(3x + x^2 + o(x^2))$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, где $P(x)$ — многочлен степени не больше 2.