Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 19 (17 ноября 2021)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Определение 1. Функция называется выпуклой вниз (вверх), если любая хорда лежит над (под) графиком функции.

Определение 2. Множество на плоскости называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Определение 3. *Надграфиком* (*подграфиком*) функции f называется множество точек плоскости, лежащих над (под) графиком $y = f(x)$:

$$\operatorname{supergraph}(f) := \{(x, y) \mid y \geq f(x), x \in D(f)\}. \tag{1}$$

$$\operatorname{subgraph}(f) := \{(x, y) \mid y \leq f(x), x \in D(f)\}. \tag{2}$$

Задача 1. Докажите, что функция выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда её надграфик (подграфик) является выпуклым множеством.

Задача 2. (🏠) Докажите, что полуплоскость (то есть надграфик или подграфик линейной функции) — выпуклое множество.

Задача 3. Пусть функция f всюда определена, выпукла вниз и для некоторых двух точек $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$. Докажите, что функция возрастает на луче $[x_2, +\infty)$. Пользоваться производными нельзя: никто не сказал, что они существуют во всех точках.

Задача 4. (Основано на Stewart, Calculus, Early transcedentals.) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба, интервалы возрастания и убывания, максимумы и минимумы. Построить график функции.

(a) $e^{-x^2/2}$

(b) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$

(c) (🏠) $\dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

(d) $\sqrt{x^2+1} - x$

(e) (🏠) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

(f) $\ln(1 - \ln x)$

(g) $e^{-1/(1+x)}$

Задача 5. Докажите *неравенство Йенсена*: для любой выпуклой (вниз) функции f, любых точек $x_1, \ldots, x_n$ и любых таких чисел $p_1, \ldots, p_n$, что $p_1 + \ldots + p_n = 1$ и для всех $i = 1, \ldots, n$, $p_i \geq 0$, верно неравенство:

$$f(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)$$

Подсказка. Вам нужна индукция.

Задача 6. (*) Рассмотрим несимметричную игральную кость с n гранями, пронумерованными числами от 1 до n. Пусть грань i выпадает с вероятностью p_i. *Энтропией* этой игральной кости называется величина:

$$H(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

Докажите, что при фиксированном n энтропия максимальна, если для всех i, $p_i = 1/n$.

Определение 4. Пусть функция f определена на полуинтервале $[x_0, b)$. Её *правой производной* в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

Аналогично можно определить левую производную. Вместе они называются *односторонними производными.*

Задача 7. Пусть функция f выпукла вниз. Докажите, что у неё в любой точке существует правая производная и левая производная.

Задача 8. (⌂) Пусть функция f выпукла вниз. Докажите, что она непрерывна в любой точке.

Задача 9. (*) Пусть функция f выпукла вниз. Докажите, что для любой точки x_0 найдётся прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и лежащая нестрого ниже графика функции f.