

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 18 (12 ноября 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих*

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$ , непрерывна на этом отрезке и обратима. Пусть она дифференцируема в точке  $x_0 \in (a, b)$  и  $f'(x_0) \neq 0$ . Тогда обратная функция  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$  и её производная равна

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Задача 1.** С помощью теоремы о производной обратной функции найдите производные следующих функций

- (a)  $\sqrt{x}$ ; (c)  $\ln x$ ; (e)  $\arccos x$ ;  
(b)  $\sqrt[3]{x}$ ; (d)  $\arcsin x$ ; (f)  $\arctg x$ .

**Задача 2.** Пользуясь равенством  $a^x = e^{x \ln a}$  найти производную функции

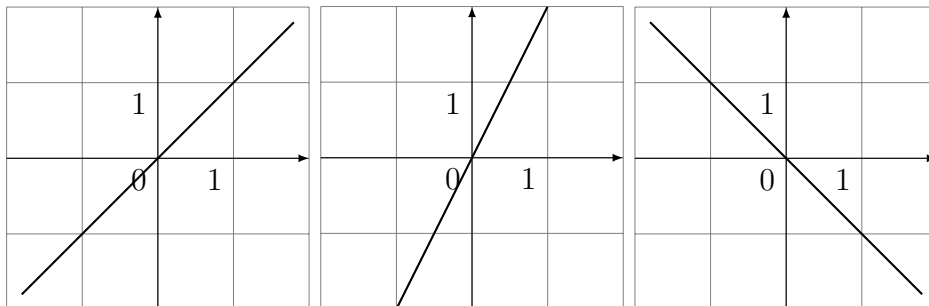
- (a)  $a^x$ ; (b)  $x^x$ ; (c)  $x^{(x^x)}$ .

**Задача 3.** Найдите производные

- (a)  $\log_5 x$ ;  
(b)  $\arctg \sqrt{|2x|}$ ;  
(c)  $e^{4 \ln x}$ ;  
(d)  $e^{f(x)}$ , если производная  $f(x)$  известна;  
(e)  $\ln f(x)$ , если производная  $f(x)$  известна;  
(f)  $(\log_3 x)^{x^2+3}$ .

**Задача 4.** Часто при графическом изображении зависимостей используют *логарифмические шкалы*, то есть по осям откладывают не сами значения величин, а их логарифмы. Логарифмическая шкала удобна, если интересующая нас величина меняется «на порядки» — например, зарплата конкретного человека может составлять 10 тыс. рублей в месяц, может 100 тыс. рублей, а может и десятки миллионов руб. При этом мы хотели бы на графике отразить разницу как между 10 тыс. и 100 тыс., так и между 100 тыс. и десятком миллионов. Если взять обычную линейную шкалу и отмасштабировать её таким образом, чтобы на графике уместились точки, соответствующие ста миллионам, то разница между 10 и 100 тысячами станет невидимой глазу. Логарифмическая шкала позволяет справиться с этой проблемой.

Рассмотрим графики



Записать зависимость формулой и нарисовать график в обычных осях  $(x, y)$ , если

- вертикальная ось является логарифмической (то есть по вертикали откладывается  $\ln y$ ), а горизонтальная — обычной;
- вертикальная ось является обычной, а горизонтальная — логарифмической;
- обе оси являются логарифмическими.

**Задача 5.** Укажите и классифицируйте точки разрыва. Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте эскизы графиков.

(a)  $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - 6x$ ;      (b)  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ;      (c)  $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ .

**Задача 6.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 \ln(2x).$$

Найти односторонний предел функции в точке  $x = 0$ , доопределить функцию в этой точке по непрерывности, то есть рассмотреть функцию  $\tilde{f}$ , которая совпадает с  $f$  во всех точках, кроме  $x = 0$ , а в  $x = 0$  принимает такое значение, что  $\tilde{f}$  односторонне непрерывна в этой точке. Имеет ли функция  $\tilde{f}$  одностороннюю производную в точке  $x = 0$ ? Если да, найти её. Найти односторонний предел производной  $\tilde{f}$  при  $x \rightarrow 0^+$ . Провести полное исследование  $\tilde{f}$ , построить её график.