

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 17 (10 ноября 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих*

**Задача 1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на всей числовой прямой и имеет две различные горизонтальные асимптоты. Докажите, что она ограничена.

**Задача 2.** Пусть  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , причём  $f'(x) = 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . Докажите, что функция  $f(x)$  является постоянной на  $[a, b]$ .

**Задача 3.** (а) Докажите, что если  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и во всех точках  $x \in (a, b)$ ,  $f'(x) > 0$ , то  $f$  строго возрастает на  $(a, b)$ .

(б) Верно ли обратное?

**Задача 4.** (♠) Пусть  $f(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что  $f(x)$  неубывает на  $(a, b)$  если и только если  $f'(x) \geq 0$  при всех  $x \in (a, b)$ . (В чём разница этой задачи с задачей 3?)

**Задача 5.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x}{10} + x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0.$$

Докажите, что  $f'(0) > 0$ , но при этом не существует такой окрестности точки 0, что в этой окрестности функция  $f$  возрастает.

**Задача 6.** Пусть функция  $f$  определена и дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и при этом  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ .

(а) (♠) Докажите, что функция  $f'$  не является ограниченной на  $(a, b)$ .

(б) Обязательно ли  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = +\infty$ ?

**Задача 7.** Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте графики.

(а)  $x^3 - x^2 - x + 1$ ;

(б)  $\sin 2x - x$ ;

(с)  $\frac{x+1}{x-1} + 2x$ ;

(д) (♠)  $2 + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ ;

(е) (♠)  $\frac{x^2}{x+2}$ ;

(ф) (♠)  $e^{x-x^2}$ .

**Задача 8.** Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x_0) = 0$ . Докажите, что существует некоторая константа  $M$  и такая окрестность  $U$  точки  $x_0$ , что  $|f(x)| < M|x - x_0|$  для всех  $x \in U$ . (Это можно сделать без теоремы Лагранжа, просто используя определение производной.)

**Задача 9.** Пусть  $f$  дифференцируема во всех точках отрезка  $[a, b]$  (в граничных точках существуют односторонние производные) и её производная непрерывна на этом отрезке. (Такие функции называют *гладкими*.) Пусть  $x_0 \in (a, b)$  и  $f(x_0) = 0$ . Докажите, что существует такая константа  $M$ , что  $|f(x)| < M|x - x_0|$  для всех  $x \in [a, b]$ . Сможете ли вы это сделать по аналогии с предыдущей задачей без теоремы Лагранжа?

**Задача 10.** (\*) Докажите, что у производной не бывает разрывов первого рода. Иными словами, если функция  $f$  дифференцируема на некотором интервале  $(a, b)$  и в точке  $x_0 \in (a, b)$  существуют односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ , то эти пределы равны между собой и равны  $f'(x_0)$ .