**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**
**Математический анализ 1** (http://math-info.hse.ru/s21/3)
**Семинар 16 (задачи для самостоятельного решения) (3 ноября 2021)**
*И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих*

Некоторые задачи основаны на книге Stewart, Calculus, Early transcedentals

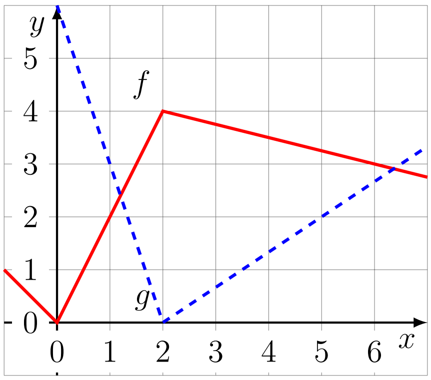
**Теорема 1.** *Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x$. Тогда*
1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
2. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

**Задача 1.** (🏠) Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x$ и $g(x)\neq 0$. Докажите, что тогда

(a) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$ (b) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

**Теорема 2.** *Пусть $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и $g$ дифференциурема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда*
$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x).$$

**Задача 2.** Графики функций $f$ и $g$ изображены на картинке. Пусть $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ и $w(x) = g(g(x))$. Найти следующие производные, если они существуют. Если не существуют, объяснить, почему.




(a) $u'(1)$; (b) (🏠) $v'(1)$; (c) (🏠) $w'(1)$.

**Задача 3.** Может ли такое быть, что $f$ и $g$ не дифференцируемы в точке $x_0$, а

(a) $f+g$; (b) (🏠) $fg$

дифференцируема в этой точке?

**Задача 4.** Может ли такое быть, что $f$ не дифференцируема в точке $x_0$, $g$ дифференцируема в точке $f(x_0)$ и при этом композиция $g\circ f$ дифференцируема в $x_0$?

**Задача 5.** Представляя $a^x$ в виде $e^{x\ln a}$, найти $(a^x)'$.

**Задача 6.** Найти производные следующих функций и укажите область определения этих производных:

(a) $\dfrac{\sin x}{2\cos x + 3}$;
(b) $x^2e^x$;
(c) (⌂) $x^2e^x\sin x$
(d) (⌂) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-1}$;
(e) (⌂) $\sin\sqrt{1+x^2}$;
(f) $\sin^2 x + \cos^2 x$;
(g) $e^{x^2}$;
(h) $e^{2^x}$;
(i) (⌂) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;
(j) $e^{2^{\sin x}}\cos^2 x^2$;
(k) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
(l) $\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$
(m) $\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$
(n) $\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$
(o) $\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$
(p) (⌂) $\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

**Задача 7.** Найти такую функцию $f$, что при всех $x\in\mathbb{R}$

(a) $f'(x)=1$
(b) $f'(x)=x$
(c) (⌂) $f'(x)=x^2$
(d) $f'(x)=\sin x$
(e) (⌂) $f'(x)=\cos x$
(f) $f'(x)=e^x$
(g) $f'(x)=e^{2x}$
(h) $f'(x)=f(x)$
(i) (⌂) $f'(x)=2f(x)$

**Задача 8.** Дана парабола — график функции $y=x^2$. Выясните, из каких точек плоскости к ней можно провести:
(a) Одну касательную?
(b) Две касательных?
(c) Ни одной касательной?

**Задача 9.** (*) Рассмотрим зеркало в форме параболы $y=x^2$. Докажите, что пучок лучей, параллельных оси $0y$, отразившись от зеркала, собирается в одной точке (фокусе параболы). Найдите эту точку.