Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 14 (15 октября 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Теорема 1. *Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$ (в концах отрезка требуется односторонняя непрерывность) и $f(a)f(b) < 0$ (то есть в концах отрезка функция принимает разные знаки). В этом случае существует точка $c \in (a, b)$, являющаяся корнем функции f, то есть $f(c) = 0$.*

Задача 1. Докажите, *теорему о промежуточном значении*: если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $y_0 \in [f(a), f(b)]$ (или $y_0 \in [f(b), f(a)]$) существует такое $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = y_0$.

Задача 2. Докажите, что функция $\ln x$ определена при всех $x > 0$.

Задача 3. Докажите, что уравнение имеет решение. Сколько решений оно имеет? (Здесь требуется использовать непрерывность корня третьей степени и логарифма. Логарифм непрерывен как функция, обратная к непрерывной, см. задачу 7 ниже; корень стретьей степени можно представить в виде композиции непрерывных функций: $e^{(\ln x)/3}$.)

(a) $x = \cos x$; (b) (🏠) $\ln x = 3 - 2x$; (c) (🏠) $\sqrt[3]{x} = 1 - x$.

Задача 4. (🏠) Турист начал восхождение на гору в 7 утра. Он заночевал на вершине горы. На следующий день в 7 утра он начал спускаться с горы, и к вечеру вернулся на базу, с которой начинал путь. Докажите, что было такое время (например, 2 часа 58 минут 9 секунд), в которое он был на одной и той же высоте в первый и во второй день.

Задача 5. Пусть функция f определена и непрерывна во всех точках интервала (a, b). Рассмотрим множество её предельных точек в точке b. Докажите, что вместе с любыми двумя точками y_1 и y_2 это множество содержит и весь отрезок между ними.

Определение 1. Функция f строго возрастает (убывает) на множестве X если для любых $x_1 < x_2$ из множества X верно: $f(x_1) < f(x_2)$ (соотв., $f(x_1) > f(x_2)$). Если неравенство нестрогое, говорят, что функция *нестрого возрастает* (соотв., *нестрого убывает*) или *неубывает* (соотв., *невозрастает*). Возрастающие и убывающие функции вместе называется *монотонными*. Если множество X не указано, считается, что X — это вся область определения функции f.

Задача 6. Докажите, что строго монотонная функция, определённая на отрезке, может иметь только разрывы типа «скачок» (то есть пределы справа и слева существуют, но не равны друг другу).

Определение 2. Функция f называется *обратимой*, если она задаёт инъективное отображение, то есть для любых двух различных точек x_1, x_2 из области определения, $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае существует *обратная функция* f^{-1} — такая, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для всех x из области определения f. Областью определения f^{-1} является область значений f и наоборот.

Задача 7. (Если не успеем на лекции) Докажите, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а также обратима, то

(a) Она является строго монотонной.
(b) Образом любого отрезка $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, под действием f является отрезок $[f(x_1), f(x_2)]$ или $[f(x_2), f(x_1)]$.
(c) Обратная функция непрерывна на всей области определения.

Задача 8. (🏠) Указать, в каком месте доказательство непрерывности обратной функции «ломается» при нарушении условия непрерывности функции f, а именно, для функции

(a) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 1 - x, & x \in [0, 2] \end{cases}$

в точке $x_0 = 0$.

Задача 9. Пусть функция f имеет разрыв в точке x_0, а функция g строго монотонно возрастает и непрерывна на всей прямой. Докажите, что $h(x) = g(f(x))$ имеет разрыв в точке x_0. **Подсказка:** Рассмотрите функцию $g^{-1}(h(x))$.

Определение 3. Рассмотрим произвольное отображение $f \colon X \to Y$. *Полным прообразом* множества $B \subset Y$ называется множество $A \subset X$, заданное следующим образом: $A = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. *Образом* множества $A \subset X$ называется множество $B \subset Y$, заданное следующим образом: $B = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Определение 4. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если вместе с любой своей точкой содержит некоторую её окрестность:

$$\forall x \in X \ \exists a \in \mathbb{R} \ \exists b \in \mathbb{R} \colon x \in (a, b) \wedge (a, b) \subset X.$$

Задача 10. Докажите, что если функция f определена и непрерывна на всей прямой $\mathbb{R}$, то полный прообраз любого открытого множества для этой функции является открытым множеством.

Задача 11. (🏠) Верно ли, что если функция f определена и непрерывна на всей прямой $\mathbb{R}$, то образ любого открытого множества под действием этой функции является открытым множеством?