

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 13 (13 октября 2021)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих*

Задача 1. Пусть функция f имеет разрыв в точке x_0 , а функция g непрерывна в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке x_0 ? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

Задача 2. (⊠) Пусть функция f имеет разрыв в точке x_0 , а функция g тоже имеет разрыв в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке x_0 ? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

Задача 3. (⊠) Пусть функция f непрерывна в точке x_0 , а функция g имеет разрыв в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке x_0 ? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

Задача 4. (⊠) Привести пример таких функций f и g , что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = a \in \mathbb{R}$$

и при этом $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$ не существует.

Подсказка. Модифицируйте пример из лекций.

Задача 5. Доказать непрерывность функции $f(x) = e^x$ во всех точках.

Подсказка. Представить $e^x = e^{x_0} e^{x-x_0}$, затем доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0} = 1$. Для последнего представить e^x как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Замечание 1. Заметим, что для любого $a > 0$, можно записать:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Мы будем использовать это равенство как определение значения выражения a^x для иррациональных x . Поскольку функция e^x непрерывна для всех x , функция a^x также является непрерывной для любого $a > 0$.

Задача 6. Доказать непрерывность функции $f(x) = \sin x$ во всех точках.

Подсказка. Использовать формулу для синуса разности и неравенство $|\sin x| \leq |x|$.

Задача 7. (⊠) Доказать непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ для всех $x \geq 0$ (в нуле — одностороннюю непрерывность).

Задача 8. (Частично с прошлого семинара.) Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.) Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Построить эскиз графика.

(Новое!) В каких точках функция непрерывна? Односторонне непрерывна? Почему? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, полюс, существенный разрыв). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? является ли функция ограниченной?

(a) $\frac{x+2}{x^2-1}$

(b) $\left(\square\right) \frac{x+2}{x^2+1}$

(c) $\frac{x^2-1}{x-4}$

(d) $\frac{x^2-1}{x-1}$

(e) $\left(\square\right) \frac{2x^2-1}{x^2-4}$

(f) $\sqrt{x^2-1}$

(g) $\left(\square\right) \sqrt{x^2+1}$

(h) $\sqrt{\frac{x^4-1}{x+1}}$

(i) $\frac{\sin x}{x}$

(j) $\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

(k) $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$

(l) $x \sin \frac{1}{x}$

(m) $x + \sin x$

(n) $x + \frac{\sin x}{x}$

(o) $\operatorname{tg} x$

(p) $\left(\square\right) x \sin x$

(q) $e^{\frac{1}{x}}$

(r) $e^{\frac{1}{x^2}}$

(s) $e^{-\frac{1}{x^2}}$

(t) $\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(u) $\begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(v) $\frac{|x|}{x}$

(w) $\frac{x^3+3^x}{x^2+2^x}$

(x) $\left(\square\right) \frac{x^2-2^x}{x^2+3^x}$

(y) $\left(\square\right) \frac{2^x-3^{-x}}{3^x+2^{-x}}$

(z) $\left(\square\right) \frac{x+\sin x}{x^2+1}$

Задача 9. Какими нужно выбрать значения параметров a и b , чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3, & x > 2. \end{cases}$$