

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 12 (8 октября 2021)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлик*

Задача 1. Пользуясь определением предела по Гейне, докажите, что предела не существует.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x;$

(b) $(\heartsuit) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x.$

Задача 2. Пользуясь арифметикой пределов (если она применима) или определением (по Коши или по Гейне) найти пределы (если предел равен бесконечности, плюс бесконечности или минус бесконечности, докажите это)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9};$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9};$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x;$

(c) $(\heartsuit) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9};$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x};$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x;$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x};$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2};$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x};$

(k) $(\heartsuit) \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^{1/x};$

Задача 3. Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.) Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Построить эскиз графика.

(a) $\frac{x+2}{x^2-1}$

(h) $\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

(r) $\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $(\heartsuit) \frac{x+2}{x^2+1}$

(i) $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$

(s) $\begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $\frac{x^2-1}{x-4}$

(j) $x \sin \frac{1}{x}$

(t) $\frac{|x|}{x}$

(d) $\frac{x^2-1}{x-1}$

(k) $x + \sin x$

(u) $\frac{x^3+3^x}{x^2+2^x}$

(e) $(\heartsuit) \frac{2x^2-1}{x^2-4}$

(l) $x + \frac{\sin x}{x}$

(v) $(\heartsuit) \frac{x^2-2^x}{x^2+3^x}$

(f) $\sqrt{\frac{x^4-1}{x+1}}$

(m) $\operatorname{tg} x$

(w) $(\heartsuit) \frac{2^x-3^{-x}}{3^x+2^{-x}}$

(g) $\frac{\sin x}{x}$

(n) $(\heartsuit) x \sin x$

(x) $(\heartsuit) \frac{x + \sin x}{x^2+1}$

(o) $e^{\frac{1}{x}}$

(p) $e^{\frac{1}{x^2}}$

(q) $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Задача 4. Докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp x = 1.$$

Подсказка. Воспользуйтесь представлением $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Задача 5. (♠) Докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp x = \exp x_0.$$

Подсказка. Воспользуйтесь тем фактом, что $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ и предыдущей задачей.

Задача 6. (♠) Пользуясь определением предела (по Коши или по Гейне) докажите, что для всякого $x_0 > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Задача 7. (♠) Студент К. записал определение предела функции следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

В этом определении есть ошибка (найдите её). Что вы можете сказать про функцию, которая «имеет предел» согласно определению студента К.?