Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 11 (6 октября 2021)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Построить график функции и найти пределы, или доказать, что они не существуют

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ -x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (d) (⌂) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Задача 2. При каком значении параметра α существует предел функции

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x < 2 \\ 5\alpha^2, & x = 2 \\ x + 7, & x > 2 \end{cases}$$

при $x \to 2$?

Задача 3. Приведите пример ограниченной функции, определённой на всей числовой прямой, имеющей в точке 0 предел справа, но не имеющей предела слева.

Задача 4. Пользуясь определением предела по Гейне, докажите, что пределы

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ (b) (⌂) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\exp(1/x)}{1/x}$

не существуют.

Задача 5. Пользуясь определением предела по Коши доказать утверждения арифметики пределов: если существует $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, то

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
(b) (⌂) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
(c) (⌂) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
(d) (⌂) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Задача 6. Пользуясь арифметикой пределов (если она применима) или определением найти пределы

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^4+3x^2-x+1)$;

(b) (⌂) $\lim\limits_{t\to -1}(t^2+1)^3(t+3)^5$;

(c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$;

(e) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$;

(f) (⌂) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$;

(g) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$.

Задача 7. Придумать и доказать теорему о двух миллиционерах для пределов функций.

Задача 8. С помощью теоремы о двух миллиционерах доказать, что

$$\lim_{x\to 0}(x^2+5x)\sin\frac{1}{x^2}=0.$$

Задача 9. (⌂) Докажите, что если функция f ограничена в проколотой окрестности точки x_0 (то есть существует такая константа C и такая проколотая окрестность точки x_0, что $|f(x)|<C$ для всех x из этой окрестности) и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

Определение 1. Точка a называется *предельной точкой* функции f в точке x_0 если для всякого $\varepsilon>0$ и всякой $\delta>0$ найдётся такая точка x, лежащая в проколотой δ-окрестности x_0, что $f(x)$ лежит в ε-окрестности точки a.

Задача 10. Докажите, что точка a является предельной точкой функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует такая последовательность x_n, сходящаяся к x_0, $x_n\neq x_0$, что $f(x_n)$ сходится к a.

Задача 11. (⌂) Докажите, что если ограниченная функция, определённая в левой полуокрестности некоторой точки, не имеет предела слева в этой точке, то её множество предельных точек в этой точке имеет более одного элемента.