

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 10 (1 октября 2021)**

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

**Определение 1.** Проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$  называется множество

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

Его можно также задать как

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

**Определение 2.** Пусть функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Говорят, что *предел функции  $f$  при  $x$  стремящемся к  $a$  равен  $b$* , если выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(a): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Другая запись:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

**Замечание.** Во всех задачах полезно рисовать графики функций или их эскизы.**Задача 1.** Пользуясь определением доказать следующие утверждения. Указать значение  $\delta$ , соответствующее  $\varepsilon = 1/10$ .

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 4x = 8;$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3;$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 3} x \neq 5;$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -1} 4x = -4;$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25;$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \neq 7;$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8;$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} |2x| = 0;$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) = 0;$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5;$

(k)  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2;$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x} = \frac{1}{7};$

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x;$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x.$

**Задача 2.** Существует ли предел функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

при  $x \rightarrow 0$ ?

**Задача 3.** (♠) Найти предел функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

при  $x \rightarrow 2$ , если он существует.

**Задача 4.** Найти предел функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

при  $x \rightarrow \sqrt{2}$ , если он существует.

**Задача 5.** Найти предел

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{2\pi}{x},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{2\pi}{x}$

если он существует.