

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год

Математический анализ 1 (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)

Семинар 9 (29 сентября 2021)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Буратино положил 1000 рублей на банковский счёт под 100% годовых. Проценты по счёту начисляются через равные промежутки времени n раз в год. Например, если $n = 1$, то проценты будут начислены один раз в конце года, если $n = 2$, то два раза — в середине и конце года (каждый раз будет начислено 50%) и т.д. Проценты начисляются с капитализацией (например, если $n = 2$, то в конце первого полугодия будут начислены проценты на исходную сумму, а в конце второго — на сумму, которая получилась в конце первого полугодия после начисления процентов). Сколько денег будет у Буратино в конце года в зависимости от n ? Как ведёт себя эта величина при $n \rightarrow \infty$? (Это называется *непрерывное начисление процентов*.)

(Решение этой задачи и привело к открытию числа e .)

Определение 1. Числом e называется следующий предел:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Задача 2. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 3. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$$

для любого целого m .

Задача 4. (♠) Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$$

для любого рационального q .

Задача 5. Положим по определению:

$$\exp a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Докажите, что $\exp a$ существует для всех вещественных a .

Замечание 1. Мы определили функцию $\exp a$ и доказали, что для всех рациональных a её значение равно e^a . Для иррациональных a мы положим по определению $e^a := \exp a$ (иначе непонятно, что такое «возведение числа в иррациональную степень»). В дальнейшем обозначения e^a и $\exp a$ считаются эквивалентными.

Задача 6. Докажите, что

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

(Напомним, что $0! = 1$ по определению.)

Задача 7. Докажите, что

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Задача 8. (*) Докажите, что для любых вещественных a, b :

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b.$$

Подпоследовательности и предельные точки

Задача 9. Найти все предельные точки последовательности. Докажите, что других нет.

(a) $\{(-1)^n\}$;

(b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$;

(c) (*) $\{\sin n\}$.

Задача 10. Придумайте последовательность, предельными точками которой являются

(a) число 0;

(b) числа 0 и $\sqrt{2}$;

(c) все натуральные числа;

(d) (☞) все рациональные числа.

Задача 11. Верно ли, что если у последовательности есть единственная предельная точка, то эта последовательность сходится к этой точке? Докажите или постройте контрпример.

Задача 12. Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к бесконечности.

Задача 13. (☞) Верно ли, что если у ограниченной последовательности есть единственная предельная точка, то эта последовательность сходится к этой точке? Докажите или постройте контрпример.