Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 8 (24 сентября 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Чему может равняться значение выражения:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$; (b) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$?

Ответ обосновать, привести все необходимые примеры и доказательства.

Задача 2. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Чему может равняться значение выражения:

(a) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$;

(c) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$;

(d) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$?

Ответ обосновать, привести все необходимые примеры и доказательства.

Задача 3. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Чему может равняться

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

если

(a) $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$; (b) $A = 0$; (c) (🏠) $A = +\infty$?

Определение 1. Скажем, что $a_n \to A + 0$ (или $a_n \to A^+$) при $n \to \infty$ (говорят: «a_n стремится к A *справа*»), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $A \le a_n < A + \varepsilon$.

Аналогично, $a_n \to A - 0$ (или $a_n \to A^-$) при $n \to \infty$ (говорят: «a_n стремится к A *слева*»), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < a_n \le A$.

Задача 4. (🏠) Пусть известно, что $a_n \to 0^+$ при $n \to \infty$. Что вы можете сказать про

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}?$$

Задача 5. (🏠) Пусть известно, что $a_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Куда и с какой стороны стремится $1/a_n$?

Новые задачи

Задача 6. Доказать, что предел последовательности существует, и найти его:

(a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\dots$

(b) (🏠) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\dots$

Подсказка: выразите a_{n+1} через a_n и исследуйте эту последовательность на монотонность и ограниченность.

Задача 7. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$, $a>0$, $x>0$. Определим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1=1$, $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=1,2,\dots$. Доказать, что существует $\lim_{n\to\infty}x_n$ и найти его.

Задача 8. В выражении $(2+x)^{25}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найти коэффициент при x^{12}.

Задача 9. (🏠) В выражении $(x+3y)^{20}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найти коэффициент при x^4y^{16}.

Задача 10. Буратино положил 1000 рублей на банковский счёт под 100% годовых. Проценты по счёту начисляются через равные промежутки времени n раз в год. Например, если $n=1$, то проценты будут начислены один раз в конце года, если $n=2$, то два раза — в середине и конце года (каждый раз будет начислено 50%) и т.д. Проценты начисляются с капитализацией (например, если $n=2$, то в конце первого полугодия будут начислены проценты на исходную сумму, а в конце второго — на сумму, которая получилась в конце первого полугодия после начисления процентов). Сколько денег будет у Буратино в конце года в зависимости от n? Как ведёт себя эта величина при $n\to\infty$? (Это называется *непрерывное начисление процентов.*)

(Решение этой задачи и привело к открытию числа e.)

Определение 2. Числом e называется следующий предел:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Задача 11. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 12. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n$$

для любого целого m.