Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 7 (22 сентября 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Докажите, что если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Придумайте два доказательства: с использованием теоремы о двух милиционерах и без неё.

Задача 2. (⌂) Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}.$$

Арифметика пределов

Начиная с этого момента можно пользоваться арифметикой пределов и другими фактами о пределах, которые вы знаете из лекций.

Задача 3. Найдите пределы, если они существуют. Если не существуют, докажите. При использовании правил арифметики пределов требуется обосновать их применимость на каждом шаге.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-12n}{2n^2+7n-2}$

(b) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+10}{n^2+1000n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+n}{\sqrt{n}-2^n\log_2 n}$;

(e) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2^{-n}}{n^2-4n+3}$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln n+2}{n^2-n+1}$;

(g) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2^n+3^n)}{n}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^{-n}}{3^n-2^{-n}}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n+n^3-2^{-n}}{2^n+3}$;

(k) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+5}}{n-1}$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2-5}-\sqrt{n^2-n}}$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n}$;

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$;

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{n}$;

(p) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$;

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 n}{\sqrt{n}+1}$.

Новые задачи

Задача 4. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Чему может равняться значение выражения:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$;

(b) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$?

Ответ обосновать, привести все необходимые примеры и доказательства.

Задача 5. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Чему может равняться значение выражения:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$;

(d) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$?

Ответ обосновать, привести все необходимые примеры и доказательства.

Задача 6. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Чему может равняться

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

если

(a) $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$;

(b) $A = 0$;

(c) (🏠) $A = +\infty$?

Определение 1. Скажем, что $a_n \to A + 0$ (или $a_n \to A^+$) при $n \to \infty$ (говорят: «a_n стремится к A *справа*»), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $A \le a_n < A + \varepsilon$.

Аналогично, $a_n \to A - 0$ (или $a_n \to A^-$) при $n \to \infty$ (говорят: «a_n стремится к A *слева*»), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < a_n \le A$.

Задача 7. (🏠) Пусть известно, что $a_n \to 0^+$ при $n \to \infty$. Что вы можете сказать про

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}?$$

Задача 8. (🏠) Пусть известно, что $a_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Куда и с какой стороны стремится $1/a_n$?

Задача 9. (Перенесено из семинара 4) Для любой последовательности $\{a_n\}$ рассмотрим последовательность её средних арифметических $b_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

(b) (🏠) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?