Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 6 (17 сентября 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Найти пределы

(a) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$;

Задача 2. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 3. Докажите, что если у последовательности есть предел, то у любой её подпоследовательности тоже есть предел, причём такой же. Верно ли обратное?

Задача 4. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0.$$

Подсказка: пусть $k(n)$ — такое натуральное число, что $2^{k(n)} < n \leq 2^{k(n)+1}$. (Такое $k(n)$ обязательно найдётся, потому что $2^k \to +\infty$ при $k \to \infty$.) Докажите, что в этом случае $\frac{\log_2 n}{n} \leq \frac{k(n)+1}{2^{k(n)}}$.
Вопрос: почему нельзя просто взять подпоследовательность $n = 2^k$ и воспользоваться предыдущей задачей?

Задача 5. Докажите, что если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Задача 6. (🏠) Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}.$$

Арифметика пределов

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$ *если* $A \neq 0$;

Начиная с этого момента этими правилами можно пользоваться, если не оговорено обратное. Также можно пользоваться предыдущими задачами и другими фактами о пределах, известными из лекций.

Задача 7. Найдите пределы, если они существуют. Если не существуют, докажите. При использовании правил арифметики пределов требуется обосновать их применимость на каждом шаге.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 - 12n}{2n^2 + 7n - 2}$

(b) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 10}{n^2 + 1000n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + n}{\sqrt{n} - 2^n \log_2 n}$;

(e) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2^{-n}}{n^2 - 4n + 3}$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \ln n + 2}{n^2 - n + 1}$;

(g) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2^n + 3^n)}{n}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^{-n}}{3^n - 2^{-n}}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n + n^3 - 2^{-n}}{2^n + 3}$;

(k) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5 + 5}}{n - 1}$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 - 5} - \sqrt{n^2 - n}}$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n}$;

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$;

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \dfrac{1}{n}$;

(p) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$;

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 n}{\sqrt{n} + 1}$.