Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Семинар 5 (15 сентября 2021)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Пусть a — некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ (если такая существует), у которой:

(a) Последовательность является неограниченной, но при этом её предел не равен ∞.
(b) Предел равен ∞, но при этом не равен $+\infty$.
(c) Предел равен $-\infty$, но при этом не равен ∞.

Задача 2. Рассмотрим последовательность $a_n = q^n$, где $q \in \mathbb{R}$. При каких значениях q

(a) последовательность имеет предел? (Какой?)
(b) не имеет конечного предела и стремится к $+\infty$?
(c) не имеет конечного предела и стремится к ∞, но не к $+\infty$?
(d) не имеет конечного предела и при этом не стремится к ∞?

Все утверждения обосновать с помощью определения предела.

Задача 3. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Пусть $b_n = a_{n+1}/a_n$.

(a) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $c < 1$, что для всех $n > N$, $b_n < c$.
(b) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое M, что для всех $n > N$, $a_n < Mc^n$. (Подсказка: $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$.)
(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Новые задачи

Задача 4. Найти пределы. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), доказать это.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}\cdot 2^n}{3^n}$
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$.
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{n+1}$.
(d) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2+n}$.

Задача 5. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{200^n}{n!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Задача 6. Найти пределы

(a) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}, \quad a>0$; (c) (*) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Задача 7. Докажите, что для всякого $a>0$, $k\in\mathbb{N}$ и всякого $C>0$ найдётся такое N что для всех $n>N$:

(a) $(1+a)^n > Cn^k$; (b) (🏠) $n! > Ca^n$.

Задача 8. Известно, что
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0.$$
Докажите, что
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$, $k=1,2,\ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 9. Докажите, что если у последовательности есть предел, то у любой её подпоследовательности тоже есть предел, причём такой же. Верно ли обратное?

Задача 10. Докажите, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n} = 0.$$
Подсказка: пусть k — такое натуральное число, что $2^k < n \leq 2^{k+1}$. (Такое k обязательно найдётся, потому что $2^k\to+\infty$ при $k\to\infty$.) Докажите, что в этом случае $\frac{\log_2 n}{n}\leq\frac{k+1}{2^k}$.
Вопрос: почему нельзя просто взять подпоследовательность $n=2^k$ и воспользоваться предыдущей задачей?

Задача 11. Докажите, что если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность и
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$
то
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Задача 12. (🏠) Найдите предел
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}.$$

Задача 13. Найдите
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$
Подсказка: докажите, что
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$