

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 4 (10 сентября 2021)***И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих*

Задача 1. Является ли последовательность ограниченной, монотонной (возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей)? Вычислите предел, если он существует. Если последовательность стремится к ∞ , $+\infty$, $-\infty$, укажите это. В каждом случае, когда предел существует, укажите номер N , который соответствует $\varepsilon = 1/8$ из определения предела.

- (a) $a_n = 1000^n$ при $n < 3000$, $a_n = \frac{1}{n}$ при $n \geq 3000$;
- (b) $a_n = 10^{-n}$ при $n = 3k$ (для какого-то целого k), $a_n = \frac{1000}{n}$ при $n \neq 3k$ (для всех k);
- (c) $a_n = 2^{-n}$ при $n \neq 3^k$ для всех целых k , $a_n = n$ при $n = 3^k$ для какого-то k .
- (d) $a_n = 2^n$ для простых n и $a_n = \sqrt{n}$ для составных n .

Задача 2. Пусть a — некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ (если такая существует), у которой:

- (a) Есть предел, равный числу a .
- (b) Есть предел равный a , но ни один из членов последовательности не равен a .
- (c) Есть предел равный a , при этом бесконечно много членов последовательности равны a и бесконечно много членов последовательности не равны a . Придумайте, как записать такое утверждение при помощи кванторов.
- (d) Число a не является пределом последовательности, при этом бесконечно много членов последовательности равны a .
- (e) Последовательность является неограниченной, но при этом её предел не равен ∞ .
- (f) Предел равен ∞ , но при этом не равен $+\infty$.
- (g) Предел равен $-\infty$, но при этом не равен ∞ .

Задача 3. Объясните, что означают следующие утверждения. Приведите пример последовательности, которая удовлетворяет указанному утверждению, и последовательности, которая ему не удовлетворяет. Что вы можете сказать про предел последовательности, которая удовлетворяет утверждению? Найдите все пары утверждений, которые являются отрицаниями друг к другу.

- (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;
- (b) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;
- (c) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$;
- (d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;
- (e) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$;
- (f) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$.
- (g) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;

Задача 4. Угадайте предел последовательности, пользуясь любыми разумными соображениями, и докажите, что это действительно предел последовательности, пользуясь определением.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$; | (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+5}}{3^n}$; | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$; |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1}$; | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 + 4n + 3}$; | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}}$; |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2^n}{n}$; | (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1}$; |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}$; | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n}$; | (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^n$ |

Задача 5. Рассмотрим последовательность $a_n = q^n$, где $q \in \mathbb{R}$. При каких значениях q

- последовательность имеет предел? (Какой?)
- не имеет конечного предела и стремится к $+\infty$?
- не имеет конечного предела и стремится к ∞ , но не к $+\infty$?
- не имеет конечного предела и при этом не стремится к ∞ ?

Все утверждения обосновать с помощью определения предела.

Задача 6. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Пусть $b_n = a_{n+1}/a_n$.

- Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $c < 1$, что для всех $n > N$, $b_n < c$.
- Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое M , что для всех $n > N$, $a_n < Mc^n$.
(Подсказка: $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_{n-1}$.)
- Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Задача 7. Для любой последовательности a_n рассмотрим последовательность её средних арифметических $b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

- (*) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?

Определение 1. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Пусть есть строго возрастающая последовательность $\{n_k\}$, элементы которой являются натуральными числами. Тогда можно рассмотреть последовательность $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$. Эта последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 8. (*) Докажите, что из любой последовательности можно выбрать нестрого монотонную подпоследовательность.