

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)**Семинар 2 (3 сентября 2021)**

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

**Задача 1.** Пусть  $A$  и  $B$  — некоторые высказывания. Докажите, что если истинно высказывание  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ , то высказывания  $A$  и  $B$  или одновременно истинны, или одновременно ложны. (В этом случае говорят, что они являются *эквивалентными*, пишут  $A \Leftrightarrow B$ .)

**Задача 2.** (♠) Докажите, что высказывание  $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$  всегда истинно.

**Задача 3.** Рассмотрим отображение  $f: X \rightarrow Y$ . Запишите с помощью кванторов  $\forall$  и  $\exists$ , знаков  $=$  и  $\neq$ , импликации  $\Rightarrow$ , конъюнкции, дизъюнкции, скобок и переменных, следующие утверждения:

- (a) Отображение  $f$  инъективно.
- (b) Отображение  $f$  сюръективно.
- (c) (♠) Отображение  $f$  биективно.

**Задача 4.** Даны следующие утверждения и предикаты ( $x, y \in \mathbb{R}$ ):

- $A$ : Все кошки серые;
- $B(x)$ :  $x + 5 = 10$ ;
- $C(x, y)$ :  $x^2 \leq y$ ;
- $E(x, y)$ :  $x^2 + y^2 = 0$ .

Среди следующих утверждений укажите истинные:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $A$ ;   | (n) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow E(x, y)$ ;                         |
| (b) $B(5)$ ;  | (o) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow E(x, y)$ ;                         |
| (c) $C(x, -1)$ ;  | (p) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow E(x, y)$ ;                         |
| (d) $A \vee B(5)$ ;   | (q) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \wedge E(x, y)$ ;                              |
| (e) (♠) $A \wedge B(5)$ ;   | (r) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: C(x, y) \Rightarrow E(x, y)$ ;                      |
| (f) $A \Rightarrow B(5)$ ;  | (s) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: E(x, y) \Rightarrow C(x, y)$ ?                      |
| (g) $A \Rightarrow B(10)$ ;   | (t) (♠) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: (C(x, y) \wedge E(x, y)) \Rightarrow \neg B(x)$ |
| (h) $\neg C(3, 4)$ ;  | (u) (♠) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow C(x, y)$                       |
| (i) $\forall x \in \mathbb{R}: B(x)$ ;  | (v) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow B(y)$                              |
| (j) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: C(x, y)$ ;            | (w) (♠) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow B(y)$                          |
| (k) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: C(x, y)$ ;            | (x) (♠) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow B(y)$                          |
| (l) (♠) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: \neg C(x, y)$ ;   |   |
| (m) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow A$ ; |   |

**Задача 5.** Пусть  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Какие из следующих утверждений верны?

- (a)  $\forall x \forall y \exists z: xy^2 < z.$  (c)  $\exists z \forall x \exists y: xy^2 = z.$   
 (b)  $\forall x \forall z \exists y: xy^2 \leq z.$  (d)  $\forall z \exists x \forall y: xy^2 \leq z.$

**Задача 6.** Записать отрицание к утверждению, не используя знак отрицания. Что верно: утверждение или его отрицание?

- (a)  $\forall x: x^2 > 0.$  (c)  $\exists x: x^2 < 0.$   
 (b)  $\forall x \exists y: x^2 > y^2.$  (d)  $\exists x \forall y: xy > 0.$

**Задача 7.** (☒) Записать отрицания ко всем утверждениям из задачи 5, не используя знак отрицания.

**Задача 8.** Какие из следующих утверждений верны?

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R}: x > 2 \Rightarrow |x| > 2.$   
 (b)  $\forall x \in \mathbb{R}: x < 2 \Rightarrow |x| < 2.$   
 (c)  $\forall x \in \mathbb{R}: |x - 3| < 1 \Rightarrow |x| < 4.$   
 (d)  $\forall x \in \mathbb{R}: |x - 3| > 1 \Rightarrow |x| > 4.$   
 (e)  $\forall x \forall y \exists z: (y > x) \Rightarrow (y > z) \wedge (z > x).$   
 (f)  $\forall \varepsilon \forall x: |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon.$   
 (g)  $\forall \varepsilon \forall x: |x - 3| < \min(\varepsilon, 1) \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon.$   
 (h) (\*)  $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x: (\delta > 0) \wedge (|x - 3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon.$

**Задача 9.** Запишите с помощью кванторов следующие утверждения про натуральные числа  $n$  и  $m$ :

- (a)  $n$  делится на  $m$ ,  
 (b)  $n$  нечётно,  
 (c)  $n$  является простым числом,  
 (d)  $n$  и  $m$  взаимно просты.

Разрешено использовать только следующие объекты и операции:

- числа;
- переменные (в т.ч. не перечисленные в условии, если необходимо),
- проверке включения элемента во множество  $\in$ ,
- множества вещественных, рациональных, целых и натуральных чисел,
- арифметические операции: только сложение и умножение,
- сравнение двух чисел: операции  $=$  и  $>$ .
- логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание (не должно стоять перед кванторами), импликация.