Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Дополнительное домашнее задание «Вещественные числа» (9 ноября 2021 г.)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Решения задач сначала нужно полностью записать, а затем уже сдавать устно. Все задачи, кроме отмеченных звездочкой * (их можно пропускать и сдавать в любом порядке), нужно сдавать по порядку. Удачи!

Все задачи весят поровну.

Для простоты мы будем в этом листке строить только положительные вещественные числа. Множество положительных рациональных чисел будем обозначать через $\mathbb{Q}_+$.

Определение 1. Число $c \in \mathbb{Q}$ называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) множества $A \subset \mathbb{Q}$, если любой элемент A не больше (не меньше) c. Иными словами, для всех $x \in A$ справедливо неравенство $x \leq c$ ($x \geq c$).

Множество всех верхних (нижних) граней множества A будем обозначать $\mathrm{UB}(A)$ ($\mathrm{LB}(A)$). Иными словами,

$$\mathrm{UB}(A) = \{c \in \mathbb{Q} \mid c \text{ — верхняя грань множества } A\};$$
$$\mathrm{LB}(A) = \{c \in \mathbb{Q} \mid c \text{ — нижняя грань множества } A\}.$$

Определение 2. Число $y \in \mathbb{Q}$ называется *точной верхней гранью* (*точной нижней гранью*) множества $A \subset \mathbb{Q}$, если $y \in \mathrm{UB}(A)$ ($y \in LB(A)$) и для любого $y' \in \mathrm{UB}(A)$ ($y' \in \mathrm{LB}(A)$) выполняется неравенство $y' \geq y$ ($y' \leq y$).

Задача 1. Рассмотрим множество $Z = \{x \mid x \in \mathbb{Q}_+,\ x^2 < 2\}$. Докажите, что это множество ограничено, но не имеет точной верхней грани (в смысле данного выше определения).

Идея построения множества вещественных чисел состоит в том, чтобы *пополнить* множество рациональных чисел какими-то элементами, так, чтобы в этом новом множестве любое ограниченное сверху подмножество имело точную верхнюю грань. Формально это делается следующим образом.

Определение 3. Ограниченное сверху множество положительных рациональных чисел назовём *положительным вещественным числом.* Два определённых таким образом положительных вещественных числа $A \subset \mathbb{Q}$ и $B \subset \mathbb{Q}$ считаем *равными*, если $\mathrm{UB}(A) = \mathrm{UB}(B)$. Обозначим множество положительных вещественных чисел через $\mathbb{R}_+$.

Задача 2. Докажите, что положительные вещественные числа $\{\frac{1}{2}\}$ и $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ равны.

Из этой задачи видно, что два вещественных числа могут быть равны, даже если они не совпадают как множества.

Везде ниже словами *вещественные числа* обозначается именно построенное так множество. До конца этого листочка нужно забыть, что когда-то мы наивно верили, что вещественные числа — это бесконечные десятичные дроби, и пользоваться определением 3.

Замечание 1. *По нашему определению положительные рациональные числа сами по себе не являются положительными вещественными. Но можно определить отображение* $E\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_+$*, вкладывающее множество положительных рациональных чисел в множество положительных вещественных, следующим образом:* $E(x) = \{x\}$ *(каждому рациональному числу ставим в соответствие множество, единственным элементом которого является это число).*

Чтобы некоторое множество можно было с полным основанием назвать множеством чисел, нужно, чтобы для элементов этого множества были определены различные арифметические операции. Давайте начнём с операции сравнения.

Задача 3. Придумайте, как сравнивать вещественные числа, то есть для любых двух положительных чисел $A, B \in \mathbb{R}_+$ нужно научиться отвечать на вопрос, какое из утверждений верно: $A \leq B$ или $A \geq B$. Докажите, что если $A \leq B$ и $B \leq A$, то $A = B$. Докажите, что если $A \leq B$ и $B \leq C$, то $A \leq C$. Докажите, что если $x, y \in \mathbb{Q}$ и $x \leq y$ (в обычном смысле сравнения рациональных чисел), то $E(x) \leq E(y)$ (в смысле построенной вами операции сравнения).

Подсказка. Проще всего решать эту задачу, сравнивая множества верхних граней для наших чисел.

Со сравнением разобрались. Теперь нужно придумать, что делать с остальными арифметическими операциями.

Определение 4. Пусть $A, B \in \mathbb{R}_+$. Положим по определению:

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Иными словами, суммой множеств A и B назовём множество всевозможных сумм $x + y$, если $x \in A$, а $y \in B$.

Задача 4. Докажите, что это определение корректно, то есть если мы возьмём другие множества A', B', равные A и B как вещественные числа (но не совпадающие с ними как множества), то получающаяся сумма $A' + B'$ будет равна $A + B$ как вещественное число.

Задача 5. Докажите, что определённая таким образом операция сложения будет действовать на рациональных числах так же, как раньше. То есть для любых двух положительных рациональных чисел $x, y \in \mathbb{Q}_+$, $E(x) + E(y) = E(x + y)$, где E определено в замечании 1.

Задача 6. Придумайте, как задать операцию умножения на положительных вещественных числах. Докажите корректность этой операции.

Задача 7. Докажите, что $Z^2 = E(2)$, где Z — вещественное число, определённое (как множество) в задаче 1, и $Z^2 = Z \cdot Z$.

Задача 8. Пусть A и B — положительные вещественные числа. Придумайте алгоритм, с помощью которого можно явно построить $\max(A, B)$, не пользуясь операциями сравнения.

Для подмножеств множества положительных вещественных чисел можно определить верхние и нижние грани, а также точную верхнюю и точную нижнюю грань, точно так же, как это делалось выше для рациональных чисел — надо просто в определениях 1 и 2 заменить $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}_+$.

Задача 9. Докажите, что всякое непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}_+$ имеет в $\mathbb{R}_+$ точную верхнюю грань.

Замечание 2. *Нет, вы не можете сказать, что это «аксиома вещественных чисел». Вам нужно доказать это утверждение, пользуясь нашим определением вещественных чисел. Более того, вы можете предъявить явный алгоритм, как строить точную верхнюю грань.*

Задача 10. Научитесь делить вещественные числа. Для любого $A \in \mathbb{R}_+$ определите элемент $\frac{1}{A}$. Проверьте, что $A \cdot \frac{1}{A} = 1$ и что для любого рационального числа $x \in \mathbb{Q}_+$, $E(\frac{1}{x}) = \frac{1}{E(x)}$.

Определение 5. Множество $\mathbb{R}_+ \setminus \{y \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in \mathbb{Q}_+ \colon y = E(x)\}$ называется множеством *положительных иррациональных чисел.*

Задача 11. Докажите, что множество положительных иррациональных чисел непусто.

Задача 12. Докажите, что между двумя различными положительными действительными числами обязательно найдётся

(a) бесконечно много положительных рациональных чисел;

(b) бесконечно много положительных иррациональных чисел.

Определение 6. Пусть $a, b \in \mathbb{R}_+$ и $a < b$. *Отрезком* $[a, b]$ называется множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid a \leq x \leq b\}.$$

Системой вложенных отрезков называется последовательность отрезков $I_0 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$

Задача 13. Дано множество попарно пересекающихся отрезков. Верно ли, что их пересечение непусто?

Задача 14. Докажите, что пересечение системы вложенных отрезков состоит из одной точки тогда и только тогда, когда для любого положительного ε в этой системе найдется отрезок $[a, b]$ длины $b - a < \varepsilon$.

Задача 15. (Игра Банаха — Мазура) Стефан Банах и Станислав Мазур играют в игру. Они по очереди выбирают отрезки на множестве $\mathbb{R}_+$. Каждый следующий отрезок должен иметь ненулевую длину, быть вложен в предыдущий и быть по крайней мере вдвое короче предыдущего. Банах выигрывает, если точка пересечения всей получившейся (бесконечной) системы вложенных отрезков будет рациональной, в противном случае выигрывает Мазур.

У кого из игроков есть выигрышная стратегия? Какая?