Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Дополнительное домашнее задание «Открытые и замкнутые множества» (31 октября 2021 г.)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Определение 1. Подмножество X множества всех вещественных чисел называется *открытым*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $(a, b) \ni x$, целиком лежащая в X.

Зачем понадобилось вводить такое понятие? Дело в том, что оно позволяет формализовать идею «устойчивости по отношению к малым шевелениям». Пусть, например, x — это параметр какой-то системы, и эта система может находиться в одном из двух состояний — «хорошем» или «плохом» — в зависимости от значения x. Если множество значений x, при которых система находится в хорошем состоянии, открытое, это означает следующее: если для какого-то значения $x = x_0$ система находилась в хорошем состоянии, а потом мы немножко изменили x, то есть положили $x = x_0 + \varepsilon$, то система по-прежнему будет в хорошем состоянии (если ε достаточно мал). То есть в этом случае «хорошесть» системы является устойчивым свойством, она не разрушается малыми шевелениями параметра.

С практической точки зрения это бывает очень важно. Например, вы доказали, что «хорошие» состояния существуют. Но если множество хороших состояний не содержит в себе открытого подмножества, это означает, что даже если вы найдёте конкретное значение x, при котором система находится в хорошем состоянии, любое его малое шевеление выведет систему из этого состояния. То есть теоретически хорошие значения x существуют, а практически их как бы нет, поскольку вы никогда не сможете подобрать значение x настолько идеально, чтобы оно попало в ваше множество хороших.

Определение 2. Подмножество X множества всех вещественных чисел называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus X$ является открытым.

Замкнутые множества в некотором смысле «обратны» открытым, как следует из определения. Однако они тоже обладают приятными свойствами, как показывает следующая задача.

Задача 1. (1) Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}$ является замкнутым если и только если предел любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$, лежит в X.

Задача 2. (1) Рассмотрим множество

(a) $[0, 1] \cup \{2\}$;
(b) $(0, 1) \cup \{2\}$;
(c) $(0, 1) \cup (1, 2)$;
(d) $[0, 2] \setminus \{1\}$;
(e) $\mathbb{Q}$;
(f) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Является ли оно замкнутым? Открытым? Ни тем ни другим?

Задача 3. (1) Является ли пустое множество замкнутым? А открытым? Аналогичный вопрос про $\mathbb{R}$.

Задача 4. (1) Докажите, что для любой последовательности множество всех её предельных точек замкнуто.

Задача 5. (1) Рассмотрим бесконечный набор множеств $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ — объединение всех этих множеств (элемент x принадлежит X, если найдётся такое n, что $x \in X_n$). Докажите, что если все X_n открыты, то X открыто. Коротко говорят: счётное объединение открытых множество открыто.

Задача 6. (1) Докажите, что счётное пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Задача 7. (0,5) Обязательно ли счётное пересечение открытых множеств открыто?

Задача 8. (0,5) Обязательно ли счётное объединение замкнутых множеств замкнуто?

Задача 9. (*3) Докажите, что интервал нельзя разбить в объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Определение 3. *Граничной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$ называется такая точка a, что в любой её окрестности содержатся как точки из X, так и точки из дополнения к X. Множество всех граничных точек X называется *границей* и обозначается ∂X.

Задача 10. (1) Найти границу множества

(a) $[1, 2]$;
(b) $(1, 2)$;
(c) $[1, 2)$;
(d) $\mathbb{R}$;
(e) $\mathbb{Q}$;
(f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Определение 4. *Замыканием* множества X называется множество $\overline{X} = X \cup \partial X$. *Внутренностью* множества X называется множество $\mathring{X} = X \setminus \partial X$.

Задача 11. (1) Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

Задача 12. (1) Докажите, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Задача 13. (1) Докажите, что внутренность любого множества является открытым множеством.

Задача 14. (1) Замыкание можно получить по-другому: добавить к множеству X множество всевозможных предельных точек всевозможных последовательностей, лежащих в множестве X. Докажите, что получится то же самое, что и раньше.

Задача 15. (1) Внутренней точкой множества называется точка, содержащаяся во множестве вместе с некоторой своей окрестностью. Докажите, что множество всех внутренних точек совпадает с внутренностью, определённой ранее.

Задача 16. (1) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество, ограниченное сверху. Докажите, что

$$\sup X \in \partial X.$$

Определение 5. Пусть $\{U_\alpha\}$ — некоторый набор открытых множеств в $\mathbb{R}$ (не обязательно конечный и даже не обязательно счётный — например, α может принимать значения в $\mathbb{R}$). Он называется *покрытием* множества $A \subset \mathbb{R}$ если

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset A.$$

Пример 1. Пусть $U_\alpha = (\alpha, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда набор $\{U_\alpha\}$ является покрытием для луча $[3, +\infty)$ и для интервала $(0, 2)$, но не является покрытием для отрезка $[0, 2]$.

Определение 6. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *компактом* если из любого покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выбрать такой *конечный* набор областей $U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}$, что он также является покрытием X, то есть

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset A.$$

(Такой набор называют «подпокрытием» и определение компактности часто формулируют коротко так: из любого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.)

Задача 17. (1) Придумайте такое покрытие интервала $(0, 1)$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Задача 18. (1) Докажите, что любой отрезок $[a, b]$ является компактом. (Подсказка: отрезок иногда полезно делить пополам.)

Задача 19. (0,5) Докажите, что любое замкнутое ограниченное множество является компактом.

Задача 20. (1) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — компакт, и про функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$ известно, что для всякой точки $x_0 \in X$ найдётся такое $\delta > 0$ и такое C, что для всякого $x \in U_\delta(x_0)$, $f(x) < C$. Докажите, что f ограничена сверху (на всём X).