Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Дополнительные задачи про пределы и логику для самостоятельного решения (23 декабря 2021 г.)

И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Докажите или опровергните следующее утверждение. Чтобы опровергнуть, запишите отрицание и докажите отрицание. Если не указано иное, x — вещественная переменная.

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon x < y$
(b) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon x > y$
(c) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\colon x < y$
(d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon x < y$
(e) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon x \le y$
(f) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\colon x < y$
(g) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon (y > x) \wedge (y = 3n)$
(h) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon a^2 < n$
(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon (n < m) \wedge (m = k^2)$
(j) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon n > 1/x$
(k) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon 1/n > x$
(l) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x > \sqrt{n}$
(m) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x^n > 2$
(n) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{Z}\colon x^n > 2$
(o) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{Z}\colon (x^n > 2) \vee (x = 1)$
(p) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon a^n > b$
(q) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon (a > 1) \Rightarrow a^n > b$

Задача 2. Найти предел, пользуясь определением. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), доказать это. Если предела не существует, доказать это. Переменная n считается натуральной, остальные переменные — вещественными.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$.
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+\frac{3}{n}}$.
(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+\frac{3}{x}}$.
(d) $\lim\limits_{x\to 2} |2x-4|$.
(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$.
(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.
(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n^3}{2^n}$ (свойствами логарифма пользоваться нельзя).
(h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$ (свойствами логарифма пользоваться нельзя).
(i) $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{30}$.
(j) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x$. (Можно пользоваться тем, что $\sin x < x$ при $x > 0$ и другими «школьными» свойствами синуса)
(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.
(l) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$.

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x}$.

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-10)$ (можно пользоваться тем, что экпонента возрастает и всюду определена, а логарифм — обратная к ней).

(o) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$.

(p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

(q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

(r) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n!}$.

(s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n-100)}{n}$.

(t) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+2^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ (свойствами логарифма пользоваться нельзя).

(u) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2}$.

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}+2^{-n}\right)$ (свойствами логарифма пользоваться нельзя).

(w) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{1/x}$.

(x) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+x^3}$.

(y) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\sin x}$.

(z) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Задача 3. Найти предел, пользуясь определением. (В пункте 3j можно пользоваться арифметикой пределов и теоремой Вейерштрасса.) Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), доказать это. Если предела не существует, доказать это. Переменная n считается натуральной, остальные переменные — вещественными.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{3n+2}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3}{n+2}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-5}{n^2+2}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n-5}{n^2+2}}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+5}{n^2-2}}$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-5}}{2n+2}$.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+3}{\sqrt{2n^2+2}}$.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+3}{2^n}$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{n}\right)^n$.

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$.

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{2n}\right)^n$.

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{2^n}$.

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\ln(2n)}$.

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x}$.

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^3}}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}$

(t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$

(u) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^3}}$

(v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

(w) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

(x) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$

(y) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Задача 4. Для каждого пункта предыдущих двух задач возьмите какое-нибудь число a, не равное пределу, и докажите, пользуясь только определением, что предел не равен a.