Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Дополнительное домашнее задание «Фракталы» (23 декабря 2021 г.)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Автор листка: Мария Матушко

Решения задач сначала нужно полностью записать, а затем уже сдавать устно. Все задачи, кроме отмеченных звездочкой * (их можно пропускать и сдавать в любом порядке), нужно сдавать по порядку. Удачи!

Определение 1. Множество Кантора строится следующим образом: $C_0 = [0,1]$, а для построения C_{n+1} нужно каждый из отрезков, входящих в C_n, разбить на три равные части и выбросить интервал, составлющий среднюю треть. Например,

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Тогда множество Кантора $C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$.

Задача 1. Пусть G_n — это объединение тех интервалов, которые мы выкидывем на n-ом шаге при построение множества Кантора, то есть $C_{n+1} = C_n \setminus G_{n+1}$.

(a) (0,25) Выпишите выражения для G_1, G_2 и G_3.
(b) (0,25) Покажите, что G_n — это объединение 2^{n-1} непересекающихся интервалов.
(c) (0,25) Назовем длиной (иногда говорят мерой) G_n сумму длин интервалов из прошлого пункта. Чему равна длина G_4?
(d) (0,25) Обозначим $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Покажите, что $C = [0,1] \setminus G$.
(e) (1) Покажите, что мера G равна 1. Тем самым мера Канторова множества равна нулю.

Задача 2. (1) Докажите, что C — нигде не плотное множество в $[0,1]$, то есть в любой окрестности $U(x)$ любой точки $x \in C$ из Канторова множества существует такой интервал I, что $I \cap C = \varnothing$.

Задача 3. Представим число $x \in [0,1]$ в троичной записи с помощью символов $0, 1, 2$. Например, число $\frac{1}{9} = 0,01_3$.

(a) (0,25) Представьте в троичной записи число $\frac{8}{27}$.
(b) (0,25) Изобразите множество чисел из отрезка $[0,1]$, в троичной записи которых на втором месте после запятой стоит 1.
(c) (0,5) Каким свойством обладает троичная запись чисел из G_n?
(d) (1) Выясните как по троичной записи числа $x \in [0,1]$ установить, лежит ли x в C. (Подсказка: удобно не запрещать записи с «хвостом» двоек.)

Определение 2. Множеств X называется счетным, если существует биекция со множеством натуральных чисел.

Задача 4. (*2) Докажите, что множество C не является счетным. (Подсказка: вспомните, как доказывалось, что множество вещественных чисел несчетно.)

Задача 5. Ковер Серпинского строится аналогично множеству Кантора, только начинаем с единичного квадрата $S_0 = [0,1] \times [0,1]$. На очередном шаге делим каждый входящий квадрат на 9 равных квадратов и выбрасываем средний квадрат без границы.

(a) (1) Постройте S_1, S_2. Сформулируйте определение аналогично множеству Кантора и введите объект аналогичный G_n.
(b) (1) Найдите площадь ковра Серпинского.
(c) (1) Как по троичной записи координат (x, y), $x, y \in [0,1]$ понять принадлежит ли точка ковру Серпинского или нет?

Задача 6. Снежинка Коха строится следующим образом: начинаем с равностороннего треугольника со стороной 1, на очередном шаге каждый отрезок, входящий в кривую, делим на три равные части и заменяем средний интервал на равностронний треугольник без этого сегмента (см рисунок). Повторяем это бесконечно много раз.

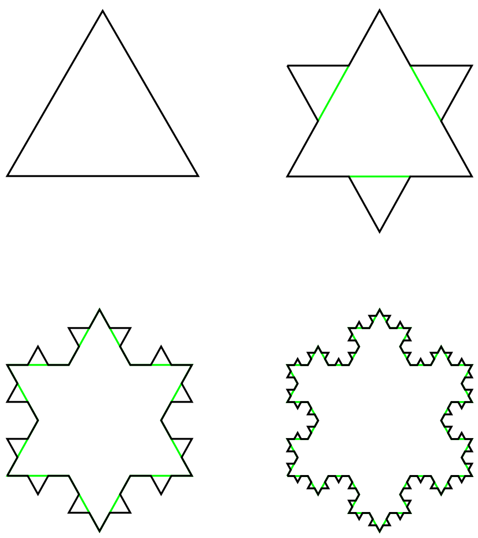

Рис. 1: Построение снежинки Коха, рисунок: Wxs / Wikimedia Commons | CC BY-SA 3.0

(a) (1) Найти периметр снежинки Коха.
(b) (1) Найти площадь фигуры, ограниченной снежинкой Коха.

(c) (1) Аналгично снежинке Коха построим кривую, в которой треугольники на средней трети отрезков строятся не «наружу», а «внутрь». Постройте три первых приближения к такой антиснежинке Коха и найдите площадь фигуры, ей ограниченной.

Определение 3. Выберем разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b.$$

Построим ломаную по заданной функции $f(x)$, последовательно соединяющую точки $(a, f(a)), (x_1, f(x_1)) \ldots (b, f(b))$. Длина кривой, заданной $f(x)$, от a до b — точная верхняя грань длин таких ломаных.

Задача 7. Лестница Кантора (Devil's staircase) — это кривая, которая строится следующим образом. Рассмотрим последовательность фигур: $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ — единичный квадрат, а для построения S_{n+1} нужно каждый из прямоугольников, входящих в S_n, разбить на шесть равных прямоугольников двумя вертикальными и одной горизонтальной прямой, после чего заменить этот прямоугольник на объединение левой нижней и правой верхней частей, а также отрезка проведенной горизонтальной прямой между двумя вертикальными. Например,

$$S_1 = ([0, 1/3] \times [0, 1/2]) \cup ([1/3, 2/3] \times \{1/2\}) \cup ([2/3, 1] \times [1/2, 1]) .$$

Тогда лестница Кантора — это $S = \cap_{n=0}^{\infty} S_n$.

(a) (0,5) Докажите, что множество S является графиком некоторой функции $y = s(x)$ (то есть прямая $x = k$ при $k \in [0, 1]$ пересекает S ровно в одной точке).
(b) (0,5) Покажите, что функция $s(x)$ неубывающая.
(c) (1) Докажите, что $y = s(x)$ — непрерывная функция.
(d) (2) Объясните, как по троичной записи x построить $y = s(x)$.
(e) (1) Посчитайте длину ломаной с вершинами в точках $(x_k, s(x_k))$, где $x_k = \frac{k}{3^n}$.
(f) (1) Докажите, что длина кривой S не больше 2. (Подсказка: пусть есть какаято ломаная, вписаная в S, рассмотрите проекции ее звена на оси координат, вспомните теорему Пифагора и воспользуйтесь монотонностью.)
(g) (1) Докажите, что длина кривой S равна 2.