Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Дополнительное домашнее задание «Комбинаторика» (11 сентября 2021 г.)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Дополнительный листок разрабатывался и дорабатывался преподавателями этого курса разных лет, в числе которых — Ирина Хованская, Наталья Гончарук, Юрий Кудряшов, Лера Старичкова, Павел Соломатин, Сергей Головань, Дмитрий Дагаев, Мария Матушко и др.

Решения задач сначала нужно полностью записать, а затем уже сдавать устно. Все задачи, кроме отмеченных звездочкой * (их можно пропускать и сдавать в любом порядке), нужно сдавать по порядку. Удачи!

Задача 1. Семь студентов решили все вместе покататься

(a) (0,5) на аттракционе «поезд», состоящем из десяти одноместных вагончиков;
(b) (0,5) на карусели, в которой десять одинаковых мест;
(c) (*3) на поезде из семи двухместных вагончиков (места в вагоне не различаются)

Сколькими способами они смогут это сделать?

Задача 2. (1+0,5) Сколько существует отображений из множества из n элементов в множество из m элементов? Каким будет ответ, если добавить условие взаимной однозначности отображения?

Задача 3. (1) Сколькими способами можно представить множество A из n элементов в виде объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_m$? Здесь n и m фиксированы, наборы множеств, отличающиеся нумерацией, считаются различными (то есть, например, для $A = \{1, 2, 3\}$, $m = 2$, разбиение $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$ и разбиение $A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ считаются различными разбиениями), A_k может быть пустым.

Задача 4. (1) Азбука Морзе кодирует цифры и русские буквы последовательностями сигналов двух типов (точка и тире), при этом самые длинные последовательности состоят из пяти сигналов. Можно ли обойтись более короткими последовательностями?

Задача 5. (1) Сколько существует различных игральных кубиков? (На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6.)

Задача 6. Сколько существует семизначных телефонных номеров (последовательностей цифр от 0 до 9), в которых:

(a) (1) не встречаются цифры 0 и 9;
(b) (1) две одинаковые цифры не идут подряд;
(c) (1) есть хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 7. У Васи и Пети есть десять карточек. Карточки пронумерованы числами от одного до десяти и окрашены в один из двух цветов: семь синих карточек и три красные. Вася умеет считать и обращает внимание на числа, а Петя не умеет, и обращает внимание только на цвет.

(a) (0,5) Сколькими различными с точки зрения Васи способами мама может разложить карточки в ряд?

(b) (0,5) Мама разложила карточки в ряд каким-то образом. Пете нравится перекладывать красные карточки, но так, чтобы порядок следования цветов не менялся (то есть с точки зрения Пети получались бы перестановки, совпадающие с исходной). Сколькими различными (с точки зрения Васи) способами он может это сделать?

(c) (0,5) Теперь Петя перекладывает не красные, а синие карточки (опять же, с сохранением порядка цветов). Сколькими способами он может это сделать?

(d) (0,5) Теперь Петя перекладывает любые карточки, но снова сохраняет порядок цветов. Сколькими способами он может это сделать?

(e) (0,5) Сколько способов разложить карточки, различных с точки зрения Васи, соответствуют одному способу их разложить с точки зрения Пети?

(f) (0,5) Сколько всего существует различных с точки зрения Пети способов разложить карточки в ряд?

Задача 8. (1) В группе детского сада каждый день проходят выборы совета группы, состоящего из трёх равноправных участников. Каждый день нужно выбирать новый совет, причём так, чтобы их составы не повторялись полностью (частичные пересечения допустимы) ни с одним из предыдущих советов. Сколько дней группа сможет проводить выборы по этим правилам, если всего в ней десять детей?

Подсказка. Им стоит позвать на помощь Васю и Петю.

Задача 9. (1) На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $n \times k$ клеток. Найдите число $(n+k)$-звенных путей, идущих из левой нижней вершины A в противоположную вершину B по сторонам клеток (можно двигаться только вправо или наверх).

Подсказка. Можно начать с рассмотрения случая $n = 7$, $k = 3$, а больше мы вам ничего не скажем.

Задача 10. Сколькими способами можно разложить 17 одинаковых шариков по 9 пронумерованным ящикам, если

(a) (1) в каждом ящике должно быть хотя бы по одному шарику;

(b) (1) некоторые ящики могут быть пустыми?

Подсказка. Представьте, что Вы выложили 17 шариков в ряд и разделили их 8 перегородками на ящики.

Задача 11. (1) Сколько существует одночленов полной степени d от n переменных? Напомним, что одночленом степени d от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, где $\sum_{i=1}^{n} m_i = d$ и $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задача 12. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых:

(a) (1) ровно четыре нуля;

(b) (1) по крайней мере четыре нуля;

(c) (2) по крайней мере два нуля и две девятки; (**подсказка**: воспользуйтесь формулой включений-исключений — изучите самостоятельно, что это такое);

(d) (1) каждая следующая цифра меньше предыдущей;

(e) (1) каждая следующая цифра не больше предыдущей?

Задача 13. (1) Как будут выглядеть слагаемые после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(x + y + z)^n$?

Задача 14. Имеется 4 чашки с разными рисунками, 4 одинаковых стакана, 10 одинаковых кусков сахара и 10 соломинок разного цвета. Сколькими способами можно разложить

(a) (1) сахар по чашкам;

(b) (1) соломинки по чашкам;

(c) (*3) соломинки по стаканам?