

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (<http://math-info.hse.ru/s21/3>)
Программа теоретической части коллоквиума (11 декабря 2020)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Если в вопросе сформулировано или названо какое-то утверждение, требуется уметь приводить его доказательство, кроме случаев, когда явно оговорено обратное. Нужно уметь отвечать на вопросы по доказательству (например, «а если вот это условие в теореме убрать, в каком месте доказательство сломается?») и приводить соответствующие примеры и контрпримеры.

1. Высказывания, предикаты, кванторы. Алгебра логики. Отрицание утверждения с кванторами.
2. Способы доказательства: метод математической индукции, доказательство от противного. Неравенство Бернулли.
3. Основные классы чисел (без построения аксиоматики действительного числа). Рациональные и иррациональные числа. Наибольший общий делитель. Представление рациональных чисел в виде несократимой дроби. Иррациональность корня из двух. Счётные и несчётные множества. Счётность множества рациональных чисел.
4. Последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
5. Бесконечные пределы (∞ , $+\infty$, $-\infty$). Предел q^n при $n \rightarrow \infty$.
6. Арифметика пределов последовательности (теоремы о пределе суммы, произведения, частного последовательностей; квадратного корня из последовательности).
7. Предельный переход в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
8. Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани (без доказательства). Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
9. Число e . (Доказательство существования, два способа представления.)
10. Экспонента (определение через предел последовательности, доказательство, что для целых чисел x определение совпадает с e^x).
11. Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Теорема Больцано — Вейерштрасса.
12. Функция одной переменной и её график. Основные типы преобразования графиков функций. Ограниченные и неограниченные функции. Точки локального экстремума.
13. Предел функции в точке и на бесконечности: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений.
14. Односторонние пределы. Бесконечный предел. Пределы на бесконечности. Асимптоты и их нахождение.

15. Непрерывность функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Исследование непрерывности полинома, рациональных функций, корня, тригонометрических функций.
16. Теорема о пределе сложной функции. Композиция непрерывных функций.
17. Первый замечательный предел.
18. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
19. Ограниченность непрерывной на отрезке функции.
20. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своей точной верхней и нижней грани.
21. Производная функции одной переменной. Геометрическая интерпретация производной. Уравнение касательной. Непрерывность дифференцируемой функции.
22. Связь знака производной и поведения функции в окрестности точки. Необходимое условие точки локального экстремума дифференцируемой функции.
23. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Связь знака производной и возрастания/убывания функции на промежутке.
24. Вычисление производных. Производная суммы, произведения, частного, композиции функций.
25. Обратная функция. Непрерывность обратной к непрерывной функции.
26. Производная обратной функции. Производные корня, логарифма, обратных тригонометрических функций.
27. Старшие производные. Выпуклость. Эквивалентность трёх утверждений о выпуклости дифференцируемой функции (выпуклость вниз, возрастание производной, график проходит над касательной в любой точке). Точки перегиба.
28. Теорема Коши. Правило Лопиталя (доказательство для случая $0/0$, предел в конечной точке).
29. O -большие и o -малые, их свойства.
30. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Её применение для вычисления пределов. Достаточное условие экстремума (через вторую производную).
31. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Её применение для приближённого вычисления значений функций.
32. Частные производные, их нахождение.
33. Разбиение отрезка, размеченное разбиение. Интеграл Римана. Примеры интегрируемых и неинтегрируемых функций. Ограниченность интегрируемой функции.
34. Первообразная непрерывной функции. Формула Ньютона — Лейбница. Её применение для нахождения интегралов.