Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2021-22 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s21/3)
Задачи к коллоквиуму (7 декабря 2021 г.)
И. Щуров, В. Болбачан, М. Бекетов, А. Трофимова, И. Эрлих

Это задачи, которые (или похожие на которые) были в коллоквиуме в прошлые годы. Тут задачи не по всем темам, вынесенным на коллоквиум этого года — например, нет задач на интегрирование. Но можно оценить уровень сложности и порешать-потренироваться. Задачи про пределы есть в отдельном листочке.

1. Привести пример функции, определённой на всём $\mathbb{R}$ и непрерывной ровно в двух точках.
2. Привести пример непрерывной функции, областью определения которой является вся прямая, а множеством значений — полуинтервал $[0, 1)$.
3. Существует ли строго монотонная функция, областью определения которой является вся прямая, а множеством значений — полуинтервал $[0, 1)$.
4. Существует ли строго монотонная функция, определённая на всей прямой, у которой областью значений является отрезок $[0, 1]$?
5. Привести пример функции с бесконечным количеством вертикальных асимптот и одной горизонтальной.
6. Привести пример функции с бесконечным количеством вертикальных асимптот и двумя различными горизонтальными.
7. Известно, что $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ и $\lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$. Обязательно ли при этом у функции $g(f(x))$ есть вертикальная асимптота?
8. Известно, что $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ и $\lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$. Обязательно ли при этом у функции $g(f(x))$ есть вертикальная асимптота?
9. Известно, что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = C$. При каких условиях на A и C обязательно существует $\lim_{n\to\infty} b_n$? Чему он равен?
10. В каких точках производная функции $\exp\exp\ldots\exp(x^2 - 1)$ (всего 2021 экспонента) принимает значение ноль?
11. Пусть существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ и $f(x_n) = 0$. Пусть также функция f имеет производную в точке 0. Найти эту производную.
12. Приведите пример функции, строго возрастающей на всей числовой оси, дифференцируемой всюду, но при этом имеющей бесконечное количество точек с нулевой производной.
13. Пусть функция f является нечётной и имеет наклонную асимптоту $y = 2x + 3$. Найдите её вторую наклонную асимптоту.
14. Пусть известно, что у функции f всюду есть непрерывная первая производная, и $f'(x_0) > 0$. Докажите или опровергните утвреждение: существует такая окрестность точки x_0, что f возрастает на этой окрестности.
15. Пусть известно, что для некоторого c и всех натуральных n, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < c \leq 1$. Верно ли, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к нулю?

16. Существует ли такая функция f, бесконечно дифференцируемая на всём $\mathbb{R}$, что для всех $x > 0$, $T_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, а для всех $x < 0$, $T_n(x) \not\to f(x)$ при $n \to \infty$. Здесь T_n — тейлоровский многочлен степени n для функции f при $x_0 = 0$.
17. Пусть у некоторой последовательности предельными точками являются все числа вида $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что тогда 0 также является её предельной точкой?
18. Докажите, что у тейлоровского многочлена в окрестности нуля для чётной функции ненулевые коэффициенты стоят только при чётных степенях переменной, а у нечётной — только при нечётных.
19. Про последовательности a_n и b_n известно, что a_n имеет конечный предел a, а b_n не имеет предела. Верно ли, что: $a_n + b_n$ обязательно имеет конечный предел? Обязательно не имеет предела?
20. Приведите пример функции, которая имеет первые 64 производные в точке 0, но не имеет 65-ю производную в этой точке.